Lösung Klausur 2003 / 2. Termin

1 (25 Punkte)

1.)

$$b = (X'X)^{-1}X'y$$

$$\begin{aligned}
X'_H X_H &= \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad X'_B X_B = \begin{bmatrix} 18 & 3 \\ 3 & 1.5 \end{bmatrix} \\
X'_H y_H &= \begin{bmatrix} 1.4 \\ 0.35 \end{bmatrix}, \qquad X'_B y_B = \begin{bmatrix} 2.2 \\ 0.45 \end{bmatrix} \\
X'X &= X'_H X_H + X'_B X_B = \begin{bmatrix} 30 & 5 \\ 5 & 2.5 \end{bmatrix} \\
X'y &= X'_H y_H + X'_B y_B = \begin{bmatrix} 3.6 \\ 0.80 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= (X'X)^{-1}X'y \\
&= \begin{bmatrix} 30 & 5 \\ 5 & 2.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3.6 \\ 0.80 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(30 \cdot 2.5) - 5^2} \begin{bmatrix} 2.5 & -5 \\ -5 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.6 \\ 0.80 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{75 - 25} \begin{bmatrix} 2.5 & -5 \\ -5 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.6 \\ 0.80 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{50} \begin{bmatrix} (2.5 \cdot 3.6) - (5 \cdot 0.80) \\ (-5 \cdot 3.6) + (30 \cdot 0.80) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 9 - 4 \\ -18 + 24 \end{bmatrix} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.12 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

β_2 lässt sich nicht als Elastizität interpretieren, weil y_t und x_{l2} nicht logarithmiert sind.

KQ-Schätzer für Hamburg:

$$
\begin{aligned}
b &= (X_H'X_h)^{-1}X_H'y_H \\
&= \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1.4 \\ 0.35 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(12-4)} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.4 \\ 0.35 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} (1.4) - (2 \cdot 0.35) \\ (-2 \cdot 1.4) + (12 \cdot 0.35) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0.7 \\ 1.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0875 \\ 0.175 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

KQ-Schätzer für Berlin

$$
\begin{aligned}
b &= (X_B'X_B)^{-1}X_B'y_B \\
&= \begin{bmatrix} 18 & 3 \\ 3 & 1.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2.2 \\ 0.45 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(18 \cdot 1.5) - 3^2} \begin{bmatrix} 1.5 & -3 \\ -3 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.2 \\ 0.45 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{27-9} \begin{bmatrix} (1.5 \cdot 2.2) - (3 \cdot 0.45) \\ (-3 \cdot 2.2) + (18 \cdot 0.45) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1.95 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.10833333 \\ 0.083333333 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

2.)

$$
\widehat{\sigma}^2 = \frac{y'y - b'X'y}{T-K}
$$

$$
\begin{aligned}
b'X'y &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.6 \\ 0.8 \end{bmatrix} \\
&= (0.1 \cdot 3.6) + (0.12 \cdot 0.8) \\
&= 0.36 + 0.096 \\
&= 0.456
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y'y &= y_H'y_H + y_B'y_B = 0.2 + 0.3 \\
&= 0.5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\sigma}^2 &= \frac{y'y - b'X'y}{T-K} \\
&= \frac{0.5 - 0.456}{30-2} \\
&= 0.0015714286
\end{aligned}
$$

3.)

$$\begin{aligned}
\sum &= \widehat{\sigma}^2(X'X)^{-1} \\
&= 0.00157\begin{bmatrix} 30 & 5 \\ 5 & 2.5 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \frac{0.00157}{50}\begin{bmatrix} 2.5 & -5 \\ -5 & 30 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.0000785 & -0.000157 \\ -0.000157 & 0.000942 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

4.)

$$R^2 = \frac{b'X'y - T\overline{y}^2}{y'y - T\overline{y}^2}$$

$$\begin{aligned}
T\left(\frac{\sum y_t}{T}\right)^2 &= \frac{(\sum y_t)^2}{T} \\
&= \frac{(3.6)^2}{30} = \frac{12.96}{30} = 0.432
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^2 &= \frac{b'X'y - T\overline{y}^2}{y'y - T\overline{y}^2} \\
&= \frac{0.456 - 0.432}{0.5 - 0.432} \\
&= \frac{0.024}{0.068} = 0.35294
\end{aligned}$$

35% der Varianz von y_t kann durch das Regressionsmodell erlärt werden.

5.) - X muss nicht stochastisch sein

- $rk(X) = K$ oder (X muss eine reguläre Matrix sein)

6.)

$$\widetilde{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

- BUE (Best Unbiased Estimator)
- Erwartungstreu
- Konsistent
- eine lineare Funktion von y

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{(y - X\widetilde{\beta})'(y - X\widetilde{\beta})}{T}$$

- Maximum-Likelihood-Schätzer für σ^2 ist verzertt.

Aufgabe 2 (25 Punkte)

1.) Signifikanztest auf 5% Signifikanzniveau

$$H_o : \beta_k = 0 \quad vs. \quad H_1 : \beta_k \neq 0$$

$$\text{Lehne} H_0 \text{ab, falls } prob < \alpha$$

Die Variablen die auf 5% S.N signifikant sind:

$$\begin{aligned} DPROD &\Rightarrow 0.0000 < 0.05 \\ DP &\Rightarrow 0.0447 < 0.05 \\ DU &\Rightarrow 0.0022 < 0.05 \end{aligned}$$

Signifikanztest auf 1% Signifikanzniveau

$$\begin{aligned} DPROD &\Rightarrow 0.0000 < 0.01 \\ DU &\Rightarrow 0.0022 < 0.01 \end{aligned}$$

Weil das Signifikanzniveau steigt, sind die Ablehnungsbereiche kleiner geworden. Deswegen können wir die Nullhypothese nicht so oft wie früher ablehnen.

2.) Einseitiger Signifikanztest auf 1% Signifikanzniveau

$$H_0 : \beta_{DP} \leq 0 \quad vs. \quad H_1 : \beta_{DP} > 0$$

$$t = 2.031815$$

$$\text{Lehne } H_0 \text{ ab, falls } \frac{prob}{2} < \alpha$$

$$\frac{prob}{2} = \frac{0.0447}{2} = 0.02235 > 0.01$$

Lehne H_0 auf 1% S.N nicht ab.

Auf 2.235% Signifikanzniveau würden wir die Nullhypothese $H_0 : \beta_{DP} \leq 0$ gerade noch annehmen.

3.) Konfidenzintervalschätzung für $\beta_{DPROD}(t = 2.617)$

$$\begin{aligned}
\left[\widetilde{\beta}_{DPROD} - t_{(108-4;0.005)}\,\widehat{\sigma}_{\beta_{DPROD}} \leq \beta_{DPROD} \leq \widetilde{\beta}_{DPROD} + t_{(108-4;0.005)}\,\widehat{\sigma}_{\beta_{DPROD}}\right] &= 1 - 0.01 \\
[0.725703 - 2.617 \cdot 0.128937 \leq \beta_{DPROD} \leq 0.725703 + 2.63 \cdot 0.128937] &= 1 - 0.01 \\
[0.3883 \leq \beta_{DPROD} \leq 1.0631] &= 1 - 0.01
\end{aligned}$$

Auf 1% Signifikanzniveau liegt 1 in diesem Konfidenzinterval. Deswegen lehnen wir die Nullhypothese $\beta_{DPROD} = 1$ auf einem 1% Signifikanzniveau nicht ab.

Ökonomische Interpretation: Es gibt eine eins zu eins Beziehung zwischen der Wachstumsrate der Nominallöhne und der Wachtumsrate der Arbeitsproduktivität .

4.)

$$\begin{aligned}
H_0 &: \beta_{DP} = \beta_{DU} = 0 \\
R\beta - r &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
R\widetilde{\beta} - r &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.227183 \\ 0.725703 \\ 0.201261 \\ -0.752273 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.201261 \\ -0.752273 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}^2 R(X'X)^{-1}R' &= \begin{bmatrix} 0.009812 & -0.005243 \\ -0.005243 & 0.057180 \end{bmatrix} \\
\left[\widehat{\sigma}^2 R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1} &= \begin{bmatrix} 0.009812 & -0.005243 \\ -0.005243 & 0.057180 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{(0.009812 \cdot 0.057180) - (-0.005243)^2} \begin{bmatrix} 0.057180 & 0.005243 \\ 0.005243 & 0.009812 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{0.00053356016} \begin{bmatrix} 0.057180 & 0.005243 \\ 0.005243 & 0.009812 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 107.16692 & 9.8264458 \\ 9.8264458 & 18.389679 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{(R\widetilde{\beta}-r)'\left[\widehat{\sigma}^2 R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\widetilde{\beta}-r)}{J} \\
&= \frac{\begin{bmatrix} 0.201261 & -0.752273 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 107.16692 & 9.8264458 \\ 9.8264458 & 18.389679 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.201261 \\ -0.752273 \end{bmatrix}}{2} \\
&= \frac{\begin{bmatrix} 14.176352 & -11.856379 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.201261 \\ -0.752273 \end{bmatrix}}{2} = \frac{11.772380}{2} \\
&= 5.8861901
\end{aligned}$$

$$F_{[2,104],0.05} \approx 3.10$$

$$\begin{aligned}
\text{Lehne } H_0 \text{ ab, falls } \lambda &> F_{(T-K),0.05} \\
5.8861901 &> 3.10
\end{aligned}$$

Lehne H_0 ab auf 5% Signifikanzniveau.

5.)

$$H_0 : \beta_{DPROD} = \beta_{DP} = \beta_{DU} = 0.$$

$$\text{Lehne } H_0 \text{ ab, falls } prob(F - statistik) < \alpha$$

$$0.00000 < 0.05$$

Weil der *prob* Wert 0.0000 ist, sind die Variablen gemeinsam signifikant. Lehne H_0 ab. Unter H_0 hat die Teststatistik eine F-Verteilung.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

1a.)

$$\begin{aligned}
y_1 &\Rightarrow (T_1 \times 1) \\
y_2 &\Rightarrow (T_2 \times 1) \\
X_1 &\Rightarrow (T_1 \times K) \\
X_1 &\Rightarrow (T_2 \times K)
\end{aligned}$$

1b.) Φ ist eine Diagonalmatrix. Die Inverse einer Diagonalmatrix, ist die Inverse der Elemente auf der Diagonalen.

$$\begin{aligned}
\Phi &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \sigma_1^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \sigma_2^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \\
\Phi^{-1} &= \begin{bmatrix} \sigma_1^{-2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \sigma_1^{-2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \sigma_2^{-2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \sigma_2^{-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{I_{T_1}}{\sigma_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{I_{T_2}}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

1c.)

$$\begin{aligned}
(X'\Phi^{-1}X) &= \begin{bmatrix} X_1' & X_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^{-2} I_{T_1} & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-2} I_{T_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{X_1'}{\sigma_1^2} I_{T_1} & \frac{X_2'}{\sigma_2^2} I_{T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \\
&= \left[\frac{X_1'X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2'X_2}{\sigma_2^2} \right]
\end{aligned}$$

1d.)

$$\begin{aligned}
(X'\Phi^{-1}y) &= \begin{bmatrix} X_1' & X_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^{-2} I_{T_1} & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-2} I_{T_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{X_1'}{\sigma_1^2} I_{T_1} & \frac{X_2'}{\sigma_2^2} I_{T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
&= \left[\frac{X_1'y_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2'y_2}{\sigma_2^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta} &= (X'\Phi^{-1}X)^{-1}(X'\Phi^{-1}y) \\
&= \left[\frac{X_1'X_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2'X_2}{\sigma_2^2} \right]^{-1} \left[\frac{X_1'y_1}{\sigma_1^2} + \frac{X_2'y_2}{\sigma_2^2} \right]
\end{aligned}$$

1e.) **Computeraufgabe:**
Hypothese

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \qquad vs \qquad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

Teststatistik

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\widehat{\sigma}_1^2}{\widehat{\sigma}_2^2} = \frac{(0,942415)^2}{(0.527982)^2} = \frac{0.888146}{0.278765} \\ &= 3.1860028 \end{aligned}$$

Entscheidung

$$\text{Lehne } H_0 \text{ ab, falls } \lambda > F_{(T_1-K, T_2-K)}$$

Kritischer Wert

$$\begin{aligned} F_{(64-4,44-4),0.05} &= 1.53 \\ 3.186 &> 1.53 \end{aligned}$$

Lehne H_0ab auf 5% Signifikanzniveau. Die Varianzen sind nicht identisch.

2a.)

$$\begin{aligned} \widehat{e}_2 &= \rho\widehat{e}_1 + \upsilon_2 \\ \widehat{e}_3 &= \rho\widehat{e}_2 + \upsilon_3 \\ &\vdots \\ \widehat{e}_T &= \rho\widehat{e}_{T-1} + \upsilon_T \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \widehat{e}_2 \\ \widehat{e}_3 \\ \vdots \\ \widehat{e}_T \end{bmatrix}}_{y_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} \widehat{e}_1 \\ \widehat{e}_2 \\ \vdots \\ \widehat{e}_{T-1} \end{bmatrix}}_{X_e} \rho + \underbrace{\begin{bmatrix} \upsilon_2 \\ \upsilon_3 \\ \vdots \\ \upsilon_T \end{bmatrix}}_{\upsilon}$$

2b.)

$$\begin{aligned} X_e' X_e &= \begin{bmatrix} \widehat{e}_1 & \widehat{e}_2 & \cdots & \widehat{e}_{T-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{e}_1 \\ \widehat{e}_2 \\ \vdots \\ \widehat{e}_{T-1} \end{bmatrix} \\ &= \widehat{e}_1^2 + \widehat{e}_2^2 + \ldots + \widehat{e}_{T-1}^2 \\ &= \sum_{t=1}^{T-1} \widehat{e}_t^2 = \sum_{t=2}^{T} \widehat{e}_{t-1}^2 \end{aligned}$$

$$\left(X_e'X_e\right)^{-1} = \frac{1}{\sum_{t=2}^{T}\widehat{e}_{t-1}^2}$$

$$\begin{aligned}
X_e'y_e &= \begin{bmatrix} \widehat{e}_1 & \widehat{e}_2 & \cdots & \widehat{e}_{T-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{e}_2 \\ \widehat{e}_3 \\ \vdots \\ \widehat{e}_T \end{bmatrix} \\
&= \widehat{e}_1\widehat{e}_2 + \widehat{e}_2\widehat{e}_3 + \ldots + \widehat{e}_{T-1}\widehat{e}_T \\
&= \sum_{t=2}^{T}\widehat{e}_t\widehat{e}_{t-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho} &= \left(X_e'X_e\right)^{-1} X_e'y_e \\
&= \frac{1}{\sum_{t=2}^{T}\widehat{e}_{t-1}^2}\sum_{t=2}^{T}\widehat{e}_t\widehat{e}_{t-1} \\
&= \frac{\sum_{t=2}^{T}\widehat{e}_t\widehat{e}_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T}\widehat{e}_{t-1}^2}
\end{aligned}$$

2c.) **Computeraufgabe:**
Durbin Watson Test

Teststatistik

$$d = 2.076952$$

Kritische Werte

$$\begin{aligned}
T &= 108, \qquad K = 4, \qquad \alpha = 0.05 \\
d_L^* &\approx 1.613, \qquad d_U^* \approx 1.736
\end{aligned}$$

i) Hypothese

$$H_0 : \rho = 0, \qquad vs \qquad H_1 : \rho > 0$$

Entscheidung

$$\begin{aligned}
\text{Lehne } H_0 \text{ ab, falls } d &< d_L^* \\
\text{Lehne } H_0 \text{ nicht ab, falls } d &> d_U^*
\end{aligned}$$

$$2.076952 > 1.736 \Rightarrow d > d_U^*$$

Lehne H_0 nicht ab auf 5% Signifikanzniveau.

ii) Hypothese

$$H_0 : \rho = 0, \qquad vs \qquad H_1 : \rho < 0$$

Entscheidung

$$\begin{aligned}
\text{Lehne } H_0 \text{ ab, falls } d &> 4 - d_L^* \\
\text{Lehne } H_0 \text{ nicht ab, falls } d &< 4 - d_U^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4 - d_L^* &= 4 - 1.613 = 2.387 \\
4 - d_U^* &= 4 - 1.736 = 2.264
\end{aligned}$$

$$2.076952 < 2.264 \Rightarrow d < 4 - d_U^*$$

Lehne H_0 nicht ab auf 5% Signifikanzniveau.