Aufgabe 1 (25 Punkte)

1. Eine Online–Druckerei möchte die Abhängigkeit des Absatzes gedruckter Fotos vom Preis untersuchen. Dazu verwendet die Firma das folgende lineare Regressionsmodell:

$$y_t = \beta_1 + x_{t2}\beta_2 + e_t, \quad t = 1, ..., T, \tag{1}$$

wobei

y_t: abgesetzte Menge von Fotos der Größe 10x15 pro Tag (logarithmiert)
x_{t2}: Preis für 10 Fotos incl. Versandkosten und 16% MWSt. in EUR

Folgende Ergebnisse sind Ihnen bekannt:

$$\sum_{t=1}^{50} x_{t2} = 30, \quad \sum_{t=1}^{50} x_{t2}^2 = 82, \quad \sum_{t=1}^{50} x_{t2}y_t = 160, \quad \overline{y} = 8, \quad y'y = 3400$$

(a) **(8 Punkte)** Schätzen Sie zunächst die Modellkoeffizienten mit der KQ–Methode und bestimmen Sie dann die geschätzte Fehlervarianz $\hat{\sigma}^2$ sowie das Bestimmtheitsmaß R^2. Was sagt das Bestimmtheitsmaß aus?

(b) **(2 Punkte)** Unter welchen Annahmen über den Fehlerterm e_t ist die KQ–Schätzung BUE?

(c) **(2 Punkte)** Interpretieren Sie b_1 und b_2 ökonomisch, d.h. geben Sie eine inhaltliche Erklärung der geschätzten Werte an.

(d) **(3 Punkte)** Der Händler überlegt, den Preis für ein Foto um 1 Cent (incl. 16% MWSt.) zu erhöhen. Wie würde sich sein Absatz dadurch verändern?

(e) **(2 Punkte)** Geben Sie die geschätzte Varianz für b_2 an.

2. Häufig sollen die unbekannten Parameter theoretischer makroökonomischer Modelle mit ökonometrischen Methoden geschätzt werden. Hier sei Ihnen die folgende Cobb–Douglas Produktionsfunktion mit konstanten Skalenerträgen gegeben:

$$Q_t = \alpha K_t^{\beta} L_t^{\gamma} e^{\epsilon_t}, \quad \beta + \gamma = 1, \quad \epsilon_t \sim (0, \sigma^2) i.i.d., \tag{2}$$

wobei Q_t den Output, L_t den Arbeitseinsatz und K_t das eingesetzte Kapital bezeichnen.

(a) **(2 Punkte)** Schreiben Sie das Modell (2) in der intensiven Form, d.h. teilen Sie durch L_t. Aus welchem Grund können Sie die Modellkoeffizienten in dieser Form nicht mit der Formel für den KQ–Schätzer aus der Formelsammlung schätzen?

(b) **(3 Punkte)** Wie können Sie das Modell (2) in der intensiven Form so transformieren, dass Sie es mit der KQ–Methode schätzen können? Schreiben Sie die lineare Regressionsgleichung auf, die sich dann ergibt. Bezeichnen Sie dabei die zu schätzenden Parameter in der üblichen Weise mit β_1, β_2.

(c) **(3 Punkte)** Geben Sie nun die abhängige Variable und die Regressormatrix an, die Sie für die KQ–Schätzung der Parameter des transformierten Modells verwenden würden. Geben Sie auch die Parameter des Ausgangsmodells, α, β, γ, in Abhängigkeit der Parameter dieses Regressionsmodells, β_1, β_2, an.

Aufgabe 2 (25 Punkte)

Betrachten Sie das lineare Regressionsmodell mit $K = 6$ deterministischen Regressoren $x_{t2}, \ldots, x_{t6}$:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \ldots + \beta_6 x_{t6} + e_t, \qquad e_t \sim N(0, \sigma^2)\, i.i.d., \qquad t = 1, \ldots, T. \tag{3}$$

In Abbildung 1 sehen Sie die Ergebnisse aus Eviews für eine Stichprobe vom Umfang $T = 126$.

1. (**2 Punkte**) Welche Variablen üben einen signifikanten Einfluss auf die abhängige Variable aus ($\alpha = 0.05$)? Was bedeutet es für eine Variable, signifikant zu sein?
2. (**1 Punkt**) Zu welchem Signifikanzniveau ist β_3 gerade noch signifikant?
3. (**5 Punkte**) Berechnen Sie ein 95%–Konfidenzintervall für β_4. Nutzen Sie dieses Konfidenzintervall um die Nullhypothese $H_0 : \beta_4 = -2.7$ ($\alpha = 0.05$) zu testen?
4. (**4 Punkte**) Sind alle Variablen (bis auf die Konstante) gemeinsam signifikant? Geben Sie die Nullhypothese in der Form $R\beta = r$ an, d.h. geben Sie die $(J \times K)$–Restriktionsmatrix R und den $(J \times 1)$–Vektor r an. Geben Sie auch die Verteilung der zugrunde liegenden Teststatistik unter der Nullhypothese an.
5. (**6 Punkte**) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : 4\beta_2 = \beta_5$ ($\alpha = 0.05$):
   - Formulieren Sie die Nullhypothese in der Form $R\beta = r$. Stellen Sie die $(J \times K)$–Restriktionsmatrix R auf.
   - Welchen Rang hat die Matrix R?
   - Berechnen Sie $[R\widehat{\sigma}^2(X'X)^{-1}R']$.
   - Berechnen Sie die Teststatistik und lesen Sie den kritischen Wert aus der Tabelle ab.
   - Wie lautet Ihre Testentscheidung?
6. (**3 Punkte**) Was ist an folgendem Text falsch? Begründen Sie kurz.

   Wenn die Fehler im Regressionsmodell (3) normalverteilt sind, sind die t–Statistiken zur Überprüfung der Signifikanz einzelner Modellkoeffizienten unter der Nullhypothese auch normalverteilt. Die Teststatistik für den Test auf gemeinsame Signifikanz mehrerer Koeffizienten ist unter der Nullhypothese unabhängig von der Normalverteilungsannahme immer F–verteilt mit K und $T - J$ Freiheitsgraden.
7. (**3 Punkte**) Geben Sie im Regressionsmodell (3) die Varianzen der abhängigen Variable y_t und des Koeffizientenschätzers $\widehat{\beta}_2$ in Abhängigkeit der Varianz des Fehlers e_t an. Welche Auswirkung hat eine Erhöhung der Fehlervarianz auf die Varianz des Schätzers für β_2 ?
8. (**1 Punkt**) Erläutern Sie kurz, was der Unterschied zwischen der Varianz des Schätzers $\widehat{\beta}_2$ und dem Schätzer der Varianz von $\widehat{\beta}_2$ ist.

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 07/11/06 Time: 12:41
Sample: 1 126
Included observations: 126

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.748872	0.288712	9.521142	0.0000
X2	0.616373	0.285820	2.156508	0.0330
X3	0.340928	0.284791	1.197115	0.2336
X4	-2.743762	0.099672	-27.52788	0.0000
X5	3.958640	0.062472	63.36687	0.0000
X6	-0.092090	0.278951	-0.330129	0.7419

R-squared	0.973893	Mean dependent var	-0.732568
Adjusted R-squared	0.972805	S.D. dependent var	18.90271
S.E. of regression	3.117241	Akaike info criterion	5.158222
Sum squared resid	1166.063	Schwarz criterion	5.293283
Log likelihood	-318.9680	F-statistic	895.2787
Durbin-Watson stat	2.218915	Prob(F-statistic)	0.000000

Geschätzte Kovarianzmatrix des Koeffizientenschätzers $[\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}]$

	C	X2	X3	X4	X5	X6
C	0.083355	-0.004338	0.013334	-0.002064	0.003182	-0.010922
X2	-0.004338	0.081693	-0.020988	-0.002357	-0.002141	-0.000348
X3	0.013334	-0.020988	0.081106	0.000323	0.000890	-0.005009
X4	-0.002064	-0.002357	0.000323	0.009935	-0.000759	-0.005737
X5	0.003182	-0.002141	0.000890	-0.000759	0.003903	-0.000985
X6	-0.010922	-0.000348	-0.005009	-0.005737	-0.000985	0.077814

Abbildung 1: Eviews–Ergebnisse zur Aufgabe 2

Aufgabe 3 (25 Punkte)

1. **(3 Punkte)** Nehmen Sie an, dass $e \sim (0, \sigma^2\Psi)$ gilt, wobei Ψ eine bekannte und reguläre $(T \times T)$–Matrix ist und $P'P = \Psi^{-1}$ gilt. Leiten Sie den Erwartungswert und die Kovarianzmatrix des transformierten Vektors $e^* = Pe$ her.

2. **Eviews Aufgabe:** Die Abbildung 2 enthält die Ergebnisse der KQ–Schätzung einer Ausgabenfunktion für die staatlichen Schulen. Die Regressionsanalyse basiert auf Daten aus 35 Staaten. Die Variablen sind wie folgt definiert:

EXPENDITURE:	Pro–Kopf–Ausgaben für staatliche Schulen,
C:	Nimmt in allen Perioden den Wert 1 an,
INCOME:	Pro–Kopf–Einkommen.

   Es wird vermutet, dass die Fehlervarianz vom Einkommen abhängt, wobei die reichen Staaten (19-35) eine höhere Varianz als die armen Staaten (1-18) haben.

   (a) **(4 Punkte)** Formulieren Sie eine geeignete Null– und Alternativhypothese zur Überprüfung der obigen Vermutung. Führen Sie den Test auf dem 5% Signifikanzniveau durch.

   (b) **(3 Punkte)** Geben Sie die Kovarianzmatrix des Fehlervektors $e = (e_1, ..., e_{35})'$ basierend auf Ihrer Testentscheidung in (a) an, wenn bekannt ist, dass die Fehlerterme unkorreliert sind ($E[e_t e_s] = 0, \quad t \neq s$). Geben Sie eine Schätzung für die Kovarianzmatrix an.

   (c) **(2 Punkte)** Erklären Sie kurz, wie Sie die Modellkoeffizienten schätzen würden (Berechnen Sie nichts!).

3. Betrachten Sie folgendes Modell:

   $$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + e_t, \quad e_t = \rho e_{t-1} + \nu_t, \quad \nu_t \sim N(0, \sigma_\nu^2), \quad |\rho| < 1 \tag{4}$$

   Aus einer KQ–Schätzung des Modells (4) stehen folgende Informationen zur Verfügung:

   $$\sum_{t=1}^{25} \hat{e}_t^2 = 0.7, \quad \sum_{t=2}^{25} \hat{e}_t \hat{e}_{t-1} = 0.12, \quad \hat{e}_1^2 = 0.018, \quad \hat{e}_T^2 = 0.045.$$

   (a) **(3 Punkte)** Schätzen Sie den Autokorrelationskoeffizienten ρ.

   (b) **(5 Punkte)** Testen Sie auf dem 5% Signifikanzniveau auf positive Autokorrelation erster Ordnung. (Berechnen Sie die Durbin–Watson Statistik. Geben Sie die Null– und Alternativhypothese sowie die kritischen Werte an.)

   (c) **(3 Punkte)** Wie würden Sie die Koeffizienten des Modells (4) schätzen und warum? Wie würden Sie die Modellkoeffizienten schätzen, wenn das Testergebnis in (3b) anders wäre. Erklären Sie kurz und berechnen Sie nichts!

4. **(2 Punkte)** Was ist an dem folgenden Text falsch? Begründen Sie kurz.

   Unter der Annahme einer allgemeinen Kovarianzmatrix des Fehlervektors, d.h. $e \sim (0, \Phi)$, *ist der KQ–Schätzer im linearen Regressionsmodell immer unverzerrt und effizient.*

Dependent Variable: EXPENDITURE
Method: Least Squares
Date: 07/12/06 Time: 16:50
Sample: 1 18
Included observations: 18

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-185.6477	240.5445	-0.771781	0.4515
INCOME	0.077337	0.036787	2.102270	0.0517

R-squared	0.216437	Mean dependent var	319.5000
Adjusted R-squared	0.167464	S.D. dependent var	51.76786
S.E. of regression	47.23476	Akaike info criterion	10.65258
Sum squared resid	35697.96	Schwarz criterion	10.75151
Log likelihood	-93.87319	F-statistic	4.419540
Durbin-Watson stat	2.260282	Prob(F-statistic)	0.051716

Dependent Variable: EXPENDITURE
Method: Least Squares
Date: 07/12/06 Time: 16:46
Sample: 19 35
Included observations: 17

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-430.5272	227.1306	-1.895506	0.0775
INCOME	0.100919	0.025856	3.903087	0.0014

R-squared	0.503871	Mean dependent var	453.0588
Adjusted R-squared	0.470796	S.D. dependent var	104.4740
S.E. of regression	76.00106	Akaike info criterion	11.60950
Sum squared resid	86642.41	Schwarz criterion	11.70753
Log likelihood	-96.68077	F-statistic	15.23409
Durbin-Watson stat	2.467596	Prob(F-statistic)	0.001412

Abbildung 2: EVIEWS–Ergebnisse zur Aufgabe 3