Devoir libre N° 1

Exercice 1

Calcluler $z = \dfrac{(1-i)^3}{(1+i)^2} + \dfrac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$

Exercice 2

Calculer les racines de l'équation $z^4 = -i$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = \bar{z}$

Exercice 4

a, b, c désignent des réels. Discuter et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$az + b\bar{z} + c = 0$$

Exercice 5

Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer l'identité suivante, appelée l'identité du parallélogramme, et donner une interprétation géométrique du résultat :

$$2(|z|^2 + |z'|^2) = |z+z'|^2 + |z-z'|^2$$

Exercice 6

Soient les applications $E \rightarrow_f F \rightarrow_g G \rightarrow_h H$

1. On suppose que $g \circ f$ est bijective, montrer que f est injective et g est surjective.
2. Montrer que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives si, et seulement si les applications f, g et h le sont.

Exercice 7

Montrer que

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$