

# ENSAE-ENSAI Mathekurs -- Devoir libre n°10

## 1 Exercice 1 (4 points)

Calculer les limites suivantes, quand elles existent :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \ln(x))}{x} \quad (1)$$

On posera  $X = x \ln(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(5x)}{\sin(x)} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\exp(\frac{1}{x}) + 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^2}{4} + 1} \frac{\cos(\sqrt{x-1})}{\ln(x-1) - 2 \ln(\frac{\pi}{2})} \quad (4)$$

## 2 Exercice 2 (6 points)

On pose  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = 0 \text{ si } x \neq 0 \text{ et } \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = x \sin(\frac{\pi}{x}) \sin(\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{x})}) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } \frac{1}{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

Montrer que  $f$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}$

## 3 Exercice 3 (6 points = 3+3)

La fonction  $f$  est-elle dérivable en 0 ?

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|} \quad (5)$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , On définit la fonction réelle  $g_n$  telle que :

$$g_n(x) = x^n \exp(\frac{1}{x}) \quad (6)$$

On désigne par  $g_n^{(n+1)}$  la dérivée d'ordre  $n+1$  de  $g_n$  **Montrer par récurrence sur  $n$  que :**

$$g_n^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} \exp(\frac{1}{x}) \quad (7)$$

## 4 Exercice 4 (4 points)

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $x_0 \in \mathbb{R}$ , de dérivée  $f'(x_0)$ . **Déterminer la limite éventuelle suivante :**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} \quad (8)$$