

Devoir Libre n° 11

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{2t-t^2}} \quad \text{Pour } x \in]0, 2[\quad \text{On pourra poser } t = 2\sin^2(u)$$

$$\int_0^x \frac{t dt}{(1+t^2)\sqrt{1-t^4}} \quad \text{Pour } x \in]-1, 1[\quad \text{On pourra poser } t^2 = \cos(u)$$

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} dt \quad \text{Pour } x \in]-1, 1[\quad \text{On pourra poser } t = \cos(u)$$

Exercice 2

Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n(x) = \int_1^x (\ln t)^n dt$. C'est à dire que $I_n(x)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto (\ln t)^n$

1 Montrer que (et préciser la constante) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \quad I_n(x) = x(\ln x)^n - nI_{n-1}(x) + Cste$$

2 En déduire que (et préciser la constante) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \quad I_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^k x (\ln x)^{n-k} + Cste$$

Exercice 3

Calculer les limites des suites ci-dessous, quand elles existent :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$v_n = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+n)^2}$$

$$w_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k}$$

$$x_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}$$

Exercice 4

Le but de cet exercice est le suivant : il s'agit de montrer, pour f fonction continue et positive sur $[a, b]$, que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_a^b f(x)^n dx \right]^{\frac{1}{n}} = \sup_{[a,b]} f$$

1 **Montrer le résultat pour f constante**

2 On pose $u_n = \left[\int_a^b f(x)^n dx \right]^{\frac{1}{n}}$. On note $M = \sup_{[a,b]} f$. **Montrer que :**

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M (b-a)^{\frac{1}{n}}$$

3 On pose $\epsilon > 0$ **Montrer que :**

$$\exists \eta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \geq \eta^{\frac{1}{n}} (M - \epsilon)$$

4 **Conclure l'exercice**