

ENSAE - Mathekurs

Devoir Libre n° 12

Exercice 1

1) Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 0$$

2) Existence et calcul de :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

3) Existence et calcul de :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq. f continue et $\exists T > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$. On pose $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tq. $a \neq b$

Montrer que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(\lambda x) dx = \frac{b-a}{T} \int_0^T f(t) dt$$

NB : On pourra considérer dans un premier temps que $\int_0^T f(t) dt = 0$

Exercice 3

Existence et calcul de :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\left(\frac{\sin x}{x - \sin x} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan(2x) \ln(\tan x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+a)^{\frac{1}{x}+1} - x^{1+\frac{1}{x+a}} \quad (a \in \mathbb{R}^*)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan^2 x)^{\frac{1}{x \sin x}}$$