ENSAE - Mathekurs

Devoir Libre n° 13

Exercice 1

Donner, quand il existe, le développement limité en 0 à l'ordre n des expressions suivantes :

$$[\ln(1+x)]^2 \quad (n=4)$$
$$\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right) \quad (n=3)$$
$$|x|^n \quad (\text{pour } n \in \mathbb{N})$$
$$\sqrt{x} \quad (\text{pour } n \in \mathbb{N})$$
$$f(x) = \ln\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) \quad \text{à l'ordre } n+1 \quad (n \in \mathbb{N})$$
$$3\tan\left[2\sin(5x^2) + 7\sqrt{1-x} - 4\cos x - \frac{3}{1+x}\right] \quad (n=3)$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. **Calculer :**

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3}\left[f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)\right]$$

Exercice 3

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tq. f est continue sur $[0,1]$, $f(0) = 0$ et f dérivable en 0. On pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+kp}\right)$$

Montrer que u_n converge et calculer sa limite

Exercice 4

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tq. f est continue. On pose :

$$F(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)dt$$

Montrer que F est bien définie et est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$
Montrer que :

$$\forall x \in [0,1] \quad F(x) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t)dt\right) du$$