ENSAE - Mathekurs

Devoir Libre n° 14

Exercice 1

Donner un équivalent de ces suites en $+\infty$:

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \sqrt[n]{n+k}$$

$$v_n = \frac{1}{n}\left[(n+1)^{\frac{n+1}{n}} - (n-1)^{\frac{n-1}{n}}\right]$$

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \quad]n, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ tq. $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k}$. On pose $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrer que l'équation $f_n(x) = \lambda$ admet une unique solution dans $]n, +\infty[$.
On note x_n cette solution.

Etudier la suite $w_n = f_n(\alpha n)$ pour $\alpha > 1$

Montrer que : $x_n \sim \dfrac{ne^{\lambda}}{e^{\lambda} - 1}$

Exercice 3

On pose $g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

Donner un développement limité de $g(x)$ au voisinage de 0, à l'ordre 4

Indication : on pourra utiliser les relations vues en cours entre développements limités et dérivation/intégration.

Exercice 4

On pose $y_n = -\ln n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Montrer que y_n converge.

NB : la limite de y_n est notée γ et est connue sous le nom de "constante d'Euler".