ENSAE - Mathekurs

Devoir Libre n° 15

Exercice 1

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $p_k = \lambda k e^{-k}$

(1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que p_k soit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.
ie. il s'agit de trouver λ tq. il existre une variable aléatoire X de loi $\mathbb{P}(X = k) = p_k$

(2) On suppose maintenant λ fixé tq. la condition de la question (1) soit satisfaite : X est ainsi une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}(X = k) = \lambda k e^{-k}$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}(X^n) < +\infty$

(3) Pour $n \in \{1, 2, 3\}$ calculer $\mathbb{E}(X^n)$

Exercice 2 : les produits infinis

Le but de cet exercice est de relier les résultats de convergence de $\prod(1 + u_n)$ à ceux de $\sum u_n$
On dira que le produit infini $\prod(1 + u_n)$ converge si et seulement si la suite $v_n = \prod_{k=0}^{n}(1 + u_k)$ converge vers une limite FINIE NON-NULLE.
Dans la suite du problème, on considérera la suite $(u)_\mathbb{N}$ tq. :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n > -1$$

(1) Montrer que :

$$\prod(1 + u_n) \quad \text{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n \geq n_0} \ln(1 + u_n) \quad \text{converge}$$

(2) On suppose dans la question (2) uniquement que $\sum u_n^2$ converge. **Montrer que :**

$$\prod(1 + u_n) \quad \text{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum u_n \quad \text{converge}$$

(3) Montrer que :

$$\sum u_n \quad \text{converge absolument} \qquad \Longrightarrow \qquad \prod(1 + u_n) \quad \text{converge}$$

(4) On suppose dans la question (4) uniquement que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 0$ **Montrer que :**

$$\prod(1 + u_n) \quad \text{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum u_n \quad \text{converge}$$

(5) Les produit infinis suivants sont-ils convergents ou divergents ?

$$\prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \qquad \prod_{n \geq 1} \cos^2\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \prod_{n \geq 1} \left(1 + \ln(n^2 + 1) - 2\ln n\right)$$