Devoir libre N° 1

Exercice 1 (2 points)

Calculer $z = \dfrac{(1-i)^3}{(1+i)^2} + \dfrac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$

Solution :

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1-i)^3}{(1+i)^2} + \frac{(1+i)^3}{(1-i)^2} = \frac{1+3i^2-3i-i^3}{1+2i-1} + \frac{1+3i^2+3i+i^3}{1-2i-1} \\ &= \frac{1-3-3i+i}{2i} - \frac{1-3+3i-i}{2i} = \frac{1-3-3i+i-1+3-3i+i}{2i} = -\frac{4i}{2i} = -2 \end{aligned}$$

Exercice 2 (2 points)

Calculer les racines de l'équation $z^4 = -i$

Solution : On pose $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$

$$\begin{aligned} & z^4 = -i \\ \Leftrightarrow \quad & \rho^4 e^{4i\theta} = e^{i3\pi/2} \\ \Leftrightarrow \quad & \rho^4 = 1 \; et \; 4\theta = 3\pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \quad & \rho = 1 \; et \; \theta = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k = 0,1,2,3 \end{aligned}$$

On obtient : $z_0 = e^{i\frac{3\pi}{8}}$, $z_1 = e^{i\frac{7\pi}{8}}$, $z_2 = e^{i\frac{11\pi}{8}}$ et $z_3 = e^{i\frac{15\pi}{8}}$

Exercice 3 (2 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = \bar{z}$

Solution : Écartons le cas trivial $z = 0$ et posons $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$

$$\begin{aligned} & z^6 = z\bar{z} = |z|^2 = \rho^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \rho^6 e^{6i\theta} = \rho^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \rho^6 = \rho^2 \; et \; 6\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \quad & \rho = 1 \; et \; \theta = \frac{k\pi}{3}, k = 0,1,2,3,4,5 \end{aligned}$$

On obtient : $z_k = e^{i\frac{k\pi}{3}}, k = 0,1,2,3,4,5$

Exercice 4 (3 points)

a, b, c désignent des réels. Discuter et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$az + b\bar{z} + c = 0$$

Solution : On pose : $z = x + yi$

$$
\begin{array}{rl}
& az+b\bar{z}+c=0 \\
\Leftrightarrow & a(x+yi)+b(x-yi)+c=0 \\
\Leftrightarrow & (a+b)x+c=0 \; et \; (a-b)y=0
\end{array}
$$

- Si $a \neq b$ et $a \neq -b$. Alors $y=0$ et $x=-\frac{c}{a+b}$.
- Si $a=b\neq 0$. Alors $y\in\mathbb{R}$ et $x=-\frac{c}{2a}$.
- Si $a=-b\neq 0$
  1. Si $c\neq 0$. Alors il n'y a pas de solution.
  2. Si $c=0$. Alors $x\in\mathbb{R}$ et $y=0$.
- Si $a=b=0$
  1. Si $c\neq 0$. Alors il n'y a pas de solution.
  2. Si $c=0$. Alors $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 (2 points)

Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer l'identité suivante, appelée l'identité du parallélogramme, et donner une interprétation géométrique du résultat :

$$2(|z|^2+|z'|^2)=|z+z'|^2+|z-z'|^2$$

Solution :

$$
\begin{array}{rcl}
|z+z'|^2+|z-z'|^2 & = & (z+z')\overline{(z+z')}+(z-z')\overline{(z-z')} \\
& = & z\overline{z}+z'\overline{z}'+z\overline{z}'+z'\overline{z}+z\overline{z}+z'\overline{z}'-z\overline{z}'-z'\overline{z} \\
& = & 2(z\overline{z}+z'\overline{z}')=2(|z|^2+|z'|^2)
\end{array}
$$

Interprétation géométrique : La somme des carrés des longueurs des côtés est égale à la somme des carrées des longueurs des diagonales.

Exercice 6 (4 points)

Soient les applications $E \rightarrow_f F \rightarrow_g G \rightarrow_h H$

1. On suppose que $g\circ f$ est bijective, montrer que f est injective et g est surjective.
2. Montrer que $g\circ f$ et $h\circ g$ sont bijectives si, et seulement si les applications f, g et h le sont.

Solution :

1. Supposons que $g\circ f$ est bijective.
   - Soient $x,x'\in E$ tels que $f(x)=f(x')$. Alors $g\circ f(x)=g\circ f(x')$. Comme $g\circ f$ est bijective, nécessairement $x=x'$. D'où l'injectivité de f.
   - Soit $y\in G$. Comme $g\circ f$ est bijective, $\exists! x\in E$ tel que $g\circ f(x)=y$ Posons $t=f(x)\in F$, alors $g(t)=y$. Ainsi, tout élément de G admet un antécédent dans F. D'où la surjectivité de g.
2. - Si f,g et h sont bijectives, il est clair que $g\circ f$ et $h\circ g$ le sont encore.
   - Réciproquement, supposons $g\circ f$ et $h\circ g$ bijectives. D'après les résultats de la question 1,
     - f est injective, g est surjective
     - g est injective, h est surjective

Déjà, g est bijective. Donc, g^{-1} existe et en écrivant

$$f = \underbrace{g^{-1}}_{bijective} \circ \underbrace{g \circ f}_{bijective}$$

et

$$h = \underbrace{h \circ g}_{bijective} \circ \underbrace{g^{-1}}_{bijective}$$

on déduit que f et h sont bijectives.

Exercice 7 (5 points)

Montrer que

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   Solution : Soit la propriété $P(n)$.

   (a) $P(0)$ est vrai : $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6}$

   (b) Supposons, que $P(n)$ est vrai.

   (c) $P(n)$ vrai $\Rightarrow P(n+1)$ vrai ? $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$
   Donc $P(n)$ vrai $\Rightarrow P(n+1)$ vrai.

   Au total, $P(0)$ vrai et $P(n)$ vrai $\Rightarrow P(n+1)$ vrai. Donc $P(n)$ est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

   Solution : Soit la propriété $P(n)$.

   (a) $P(0)$ est vrai : $\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0 = [\frac{0(0+1)}{2}]$

   (b) Supposons, que $P(n)$ est vrai.

   (c) $P(n)$ vrai $\Rightarrow P(n+1)$ vrai ? $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2 + (n+1)^2(n+1) = (n+1)^2(\frac{n^2+4n+4}{4}) = [\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}]^2$
   Donc $P(n)$ vrai $\Rightarrow P(n+1)$ vrai.

   Au total, $P(0)$ vrai et $P(n)$ vrai $\Rightarrow P(n+1)$ vrai. Donc $P(n)$ est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

   Solution : Soit la propriété $P(n)$.

   (a) $P(0)$ est vrai : $\sum_{k=0}^{0} k^4 = 0 = \frac{0(0+1)(2\times 0+1)(3\times 0^2+3\times 0-1)}{30}$

   (b) Supposons, que $P(n)$ est vrai.

   (c) $P(n)$ vrai $\Rightarrow P(n+1)$ vrai ? $\sum_{k=0}^{n+1} k^4 = \sum_{k=0}^{n} k^4 + (n+1)^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} + \frac{30(n+1)^4}{30} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)(3(n+1)^2+3(n+1)-1)}{30}$
   Donc $P(n)$ vrai $\Rightarrow P(n+1)$ vrai.

   Au total, $P(0)$ vrai et $P(n)$ vrai $\Rightarrow P(n+1)$ vrai. Donc $P(n)$ est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$.