Devoir libre N° 2

À rendre pour le 02/12/2005

Exercice 1 (4 points)

Dans $\mathbb{R}^5$, soient les vecteurs

$$\vec{x_1}= (1,0,1,1,1), \vec{x_2}= (2,1,3,0,2), \vec{x_3}= (1,-1,1,1,1)$$

1. Montrer qu'ils sont libres et les compléter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^5$.
2. Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire de $F = Vect(\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$.

Exercice 2 (4 points)

1. Montrer que $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x+t = y-z = 3x+t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et trouver une base de F.
2. Déterminer un sous-espace supplémentaire de F.

Exercice 3 (5 points)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $(u,v,w) \in E^3$.

1. Montrer que :

$$Vect(u,v) = Vect(u,w) \Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{K}^3, bc \neq 0, a.u + b.v + c.w = 0$$

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que :

$$F + Vect(v) = F + Vect(w) \Leftrightarrow \exists (u,a,b) \in F \times \mathbb{K}^2, ab \neq 0, u + a.v + b.w = 0$$

Exercice 4 (3 points)

Calculer le produit $P_n(X) = (1+X)(1+X^2)...(1+X^{2^n})$. (Indication : On pourra calculer $P_0(X)$, $P_1(X)$ et $P_2(X)$, formuler une hypthèse et procéder par récurrence.)

Exercice 5 (2 points)

Trouver tous les polynômes de degré 4 dont le reste de la division euclidienne par le polynôme $Q(X) = X^2 + 1$ est égal à X.

Exercice 6 (2 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ (i.e. $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$) et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un seul polynôme P_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$P_n(X) + \alpha P_n'(X) = X^n$$