Deutsch-französischer Doppeldiplomstudiengang HUB - ENSAE **2003-2004**

Lundi 8 mars 2004 Durée : 2h30

Devoir Surveillé

Sans document, sans calculatrice

Exercice 1 : Suite définie par une fonction [3 points]

1. Étudier la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^3+2x-1}{3}$ pour $x \in \mathbb{R}$

2. Soit la suite de récurrence définie par :

$$\begin{cases} u_0 & \in & \mathbb{R} \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$$

Discuter la nature de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ selon les valeurs de u_0.

Exercice 2 : Dérivation [3 points]

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et f la fonction définie par $f(x) = x^n \cdot sin(\frac{1}{x})$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

1. Prolonger par continuité f en 0.

2. Pour quelles valeurs de n la fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{D}^1$ ou $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

(On rappelle que $\mathcal{C}^0$ désigne les fonctions continues, $\mathcal{D}^1$ les fonctions dérivables et $\mathcal{C}^1$ les fonctions dérivables dont la dérivée est continue.)

Exercice 3 : Projecteurs [4 points]

Soit p,q deux projecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si

$$p \circ q = q \circ p = 0$$

2. Montrer que dans ce cas on a :

$$Ker(p+q) = Kerp \cap Kerq$$

3. Montrer de plus que :

$$Im(p+q) = Imp \oplus Imq$$

Exercice 4 : Changement de base [4 points]

Munissons $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = \{e_1,e_2,e_3\}$. Introduisons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est la suivante :

$$M = \text{Mat}(f,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et posons $\varepsilon_1 = (1,0,1)$, $\varepsilon_2 = (1,1,1)$ et $\varepsilon_3 = (2,0,1)$.

1. Prouver que $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Dresser $N = \text{Mat}(f,\mathcal{C})$ la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.

3. Déterminer N^n pour $n \geqslant 1$.

4. En déduire l'expression de M^n pour $n \geqslant 1$.

Exercice 5 : Suites récurrentes linéaires [6 points]

On note $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes et on s'intéresse au sous-ensemble E de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ constitué des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0 \tag{1}$$

où $(a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. On introduit de plus l'application φ définie par :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0,u_1) \end{array}$$

1. Commencer par vérifier :
 a. que l'ensemble E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$;
 b. et que l'application φ est linéaire.

2. On cherche ici à déterminer la dimension (sur $\mathbb{C}$) de E ; procéder comme suit.
 a. Vérifier que φ est surjective.
 b. Étudier l'injectivité de φ.
 c. En déduire la dimension de E (rappel : deux espaces vectoriels isomorphes ont même dimension).

3. Soit $r \in \mathbb{C}^*$; à quelle condition (sur r) la suite géométrique de raison r — c'est-à-dire la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ — appartient-elle à E?

4. On se place ici dans le cas où le polynôme $X^2 + aX + b$ admet deux racines distinctes r_1 et r_2.
 a. Montrer que les suites géométriques $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes.
 b. En déduire que pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ unique tel que $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

5. On se place pour finir dans le cas où le polynôme X^2+aX+b admet une racine double notée r.
 a. Montrer que la suite $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient alors à E.
 b. Vérifier que les suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes.
 c. En déduire la forme des éléments de E dans ce cas.