Devoir Surveillé n°2 : Correction

Dans toute la suite, $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et E,F,G désigne des $\mathbb{K}$-ev., où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (4 points) *Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose :*

$$F_\lambda = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : P(\lambda) = 0\}$$

Montrer que F_λ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En déterminer une base. Quelle est sa dimension ?

Solution :

1. Montrons que F_λ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :
   Il est clair que $F_\lambda \subset \mathbb{R}_n[X]$. Par conséquent, il suffit de montrer que F_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
   On a que $F_\lambda \neq \emptyset$ car $0 \in F_\lambda$.
   De plus, $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall(P, Q) \in F_\lambda^2$, on a bien $\lambda \cdot P + \mu \cdot Q \in F_\lambda$.
   Donc F_λ est un s-e-v de $\mathbb{R}_n[X]$, donc c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Pour déterminer la dimension de F_λ, nous allons en donner une base (évidemment, F_λ est de dimension finie).
   Soit $P \in F_\lambda$, alors par définition $P(\lambda) = 0$, donc $(X - \lambda)|P$.
   Par conséquent,

   $$\exists Q \in \mathbb{R}_n[X] : P(X) = (X - \lambda) \cdot Q(X)$$

   Le polynôme Q peut s'écrire sous la forme :

   $$Q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot X^k$$

   Donc $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot X^k \cdot (X - \lambda)$. La famille de polynômes

   $$\big((X - \lambda), X(X - \lambda), ..., X^{n-1}(X - \lambda)\big)$$

   est donc une famille génératrice de F_λ, de plus elle est libre car elle est formée de polynômes de degrés échelonnés. C'est donc une base de F_λ, et la dimension de F_λ est n.

■

Exercice 2 (4 points) *Soit l'application* $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], f(P) = P(2)$$

1. *Montrer que f est une application linéaire.*
2. *Déterminer son image et son noyau (on donnera une base de chaque).*

Solution :

1. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (P, Q) \in \mathbb{R}_3[X]$, on a bien

$$f(\lambda \cdot P + \mu \cdot \mathbb{Q}) = f(\lambda \cdot P) + f(\mu \cdot \mathbb{Q})$$

   Par conséquent, f est bien une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}$ (c'est donc une forme linéaire).

2. • Comme $Im(f) \neq \{\overrightarrow{0}\}$ on a $rg(f) \geq 1$. Mais $Im(f) \subset \mathbb{R}$, donc $rg(f) \leq 1$. Par conséquent, $rg(f) = 1$ et $Im(f) = \mathbb{R}$ (tout scalaire non nul est donc une base de $Im(f)$).

   • Déterminons le noyau de f :

$$\begin{aligned} P \in ker(f) &\iff f(P) = P(2) = 0 \\ &\iff (X-2)|P \end{aligned}$$

   De plus, la formule de la dimension nous dit que $dim(ker(f)) = 3$. On en déduit que la famille

$$\big((X-2), X(X-2), X^2(X-2)\big)$$

   est une base de $Ker(f)$.

■

Exercice 3 (4 points) *Soit* f *un endomorphisme de* E *tel que* $\forall x \in E$, $f \circ f(x) = x$. *Montrer que* $Ker(f + Id_E)$ *est un supplémentaire de* $Im(f + Id_E)$ *dans* E.

Solution : Pour montrer que deux s-e-v sont supplémentaires, il faut et il suffit de montrer qu'ils sont en somme directe, et que cette somme est surjective.

1. Somme directe :
   Soit $x \in Ker(f + Id_E) \cap Im(f + Id_E)$. Alors, $x \in Ker(f + Id_E) \Longrightarrow f(x) = -x$. Mais on a aussi $x \in Im(f + Id_E)$ donc $\exists u \in E : f(u) + u = x$. Comme $f \circ f(u) = u$, on obtient $f(u) + u = -x$. Par conséquent $x = -x$, on en déduit donc que $x = 0$.
   c.q.f.d.

2. Surjectivité :
   Nous allons procéder par analyse-synthèse :

- Analyse :
  Soit $y \in E$, supposons qu'il existe $u \in Ker(f + Id_E)$ et $v \in Im(f + Id_E)$ tel que $y = u + v$. Alors,

  $$f(y) + y = \underbrace{f(u) + u}_{=0} + \underbrace{f(v) + v}_{=2v}$$

  il est donc nécessaire d'avoir :

  $$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(y + f(y)) \\ v &= \frac{1}{2}(y - f(y)) \end{aligned}$$

- Synthèse :
  en posant $u := \frac{1}{2}(y + f(y))$ et $v := \frac{1}{2}(y - f(y))$, on a bien le résultat attendu.

Par conséquent, $Ker(f + Id_E)$ est un supplémentaire de $Im(f + Id_E)$ dans E.

■

Exercice 4 (4 points) *Dans* $\mathbb{C}[X]$, *déterminer le reste de la division euclidienne de* $P(X) = (X \cdot \cos(t) + \sin(t))^n$ *par* $\left(X^2 + 1\right)$ *où* $n \geq 2$ *et* $t \in \mathbb{R}$.

Solution : cf. livre de *Tran Van Hiep*, p106-107 ■