**Préparation pour l'échange ENSAE/ENSAI/HU - 2003/2004**

# DEVOIR LIBRE N°11

SYSTÈMES LINÉAIRES / RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

**A préparer pour le lundi 03 mai 2004**

**Exercice 1** 1. *Utiliser la méthode du pivot pour inverser la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

2. *Pour tout triplet* $(x, y, z)$ *on pose :*

$$M_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$$

*On considère le système (non linéaire)* $(S)$ *de trois équations à trois inconnues suivant :*

$$(S) : \begin{cases} x^2 - yz = 5 \\ y^2 - zx = -1 \\ z^2 - xy = 3 \end{cases}$$

*En notant* $I$ *la matrice identité d'ordre* 3*, prouver que si* $(x, y, z)$ *est solution de* $(S)$ *alors :*

$$A \cdot M_{(x,y,z)} = (5x - y + 3z) \cdot I$$

3. *En déduire que, dans ces conditions, il existe un nombre réel* $k$ *tel que :* $(x, y, z) = (2k, -k, k)$.

4. *Montrer que le système* $(S)$ *admet deux solutions, que l'on calculera.*

**Exercice 2** *Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :*

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} \text{ et } D_2 = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (c+b)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (a+c)^2 \end{vmatrix}$$