Préparation pour l'échange ENSAE/ENSAI/HU - 2003/2004

Devoir Libre n°12

Réduction d'endomorphismes

A rendre le jeudi 27 mai 2004

Exercice 1 (8 points) *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star, A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *On note* f_α *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base canonique est* $A(\alpha)$.

1. (a) *Calculer les valeurs propres de* f_α. f_α *est-il diagonalisable ?*

   (b) *Déterminer les valeurs de* α *pour lesquelles* f_α *est un automorphisme.*

2. *Déterminer une base de* $\mathbb{R}^3$ *formée de vecteurs propres de* f_α.

Exercice 2 (8 points) *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base canonique est* $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *L'endomorphisme* f *est-il inversible ? (justifier)*

2. *Montrer que l'endomorphisme* f *est diagonalisable.*
   Trouver une base de vecteurs propres et déterminer la matrice associée à f *dans cette base.*

3. *On considère la matrice :* $M' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer que M' *admet les mêmes valeurs propres que* M. *Prouver qu'il existe une matrice inversible* P *telle que* $M' = PMP^{-1}$, *et expliciter une telle matrice* P.

Exercice 3 (4 points) *Calculer les déterminants suivants, en établissant une formule de récurrence entre* D_n *et* D_{n-1}, *pour* $n \geq 2$.

$$D_n^1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \qquad D_n^2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$ [1]