Préparation pour l'échange ENSAE/ENSAI/HU - 2003/2004

Devoir Libre n°1

Algèbre : Généralités, Arithmétique, Structures, $\mathbb{R}$ & $\mathbb{C}$

A rendre le mardi 11 novembre 2003

Cette série d'exercices se réfère aux 3 premiers chapitres du polycopié d'algèbre. Les étudiants peuvent s'en inspirer librement et utiliser tout théorème énoncé dans ledit polycopié sans avoir à le démontrer.

Exercice 1 (Applications) *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que si f et g sont injectives (resp. surjectives, bijectives) il en est de même pour $g \circ f$. Montrer que si $g \circ f$ est injective (resp. surjective) alors f est injective (resp. g est surjective).*

Exercice 2 (Factorisation en nombres premiers) *Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. On note $a \wedge b$ le plus grand diviseur commun de a et b et on suppose que $a \wedge b = 1$. Montrer que $a \wedge (bc) = a \wedge c$.*

Exercice 3 (Factorisation en nombres premiers) *Soient $a, b, c \in \mathbb{N}^\star$. Quand a-t-on $pgcd(a, b, c) \times ppcm(a, b, c) = abc$?*

Exercice 4 (Groupes) *Cet exercice présente un résultat classique sur les sous-groupes de R, qu'il est utile de retenir. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Montrer que soit G est dense (i.e. $\forall e < f$, $\exists t \in]e, f[$), soit G est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$.*
Indication : considérer $a = \inf(g,\ g \in G \, et \, g > 0)$, et discuter selon que $a = 0$ ou $a > 0$.
Corollaire : soit G le groupe aZ+bZ. (a et b sont dans R). Montrer que G est dense équivaut à a/b est irrationnel.

Exercice 5 (Nombres Complexes) *Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| = 1$. On note $\{z_1, ..., z_n\}$ les solutions de l'équation $z^n = a$. Montrer que les points du plan complexe d'affixes $(1 + z_1)^n, ..., (1 + z_n)^n$ sont alignés. (Beweisen, dass diese Punkte eine Linie bilden)*

Exercice 6 (Nombres Complexes) *On pose $A = \{z \in \mathbb{C} : z + \bar{z} = |z|\}$. Déterminer A.*