Préparation pour l'échange ENSAE/ENSAI/HU - 2003/2004

Devoir Libre n°5

Les polynômes (2)

A rendre le mardi 18 décembre 2003

Cette série d'exercices se réfère au chapitre sur les polynômes distribué en cours. Les étudiants peuvent s'en inspirer librement et utiliser tout théorème énoncé dans ledit document sans avoir à le démontrer. Dans toute la suite, $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (5 points) *Soit $P(X) = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ un polynôme à coefficients entiers (i.e. dans $\mathbb{Z}$) avec $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$. On suppose que $\frac{p}{q}$ est une racine rationnelle (i.e. dans $\mathbb{Q}$) de P (i.e. $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $p \in \mathbb{Z}$, p et q premiers entre eux).*

1. *Montrer que p divise a_0 et q divise a_n*
2. *En déduire une factorisation de $\big(6X^4 - 11X^3 - X^2 - 4\big)$.*

Indication : Pour la question 1 on isolera respectivement a_0q^n et a_np^n dans $P(\frac{p}{q}) = 0$ et on utilisera le théorème de Gauss énoncé ci-dessous :
"Soit $a, b, c \in \mathbb{N}$, si $a|(b \cdot c)$ et a et b premiers entre eux, alors $a|c$."

Exercice 2 (5 points) *On pose $P_n(X) = \frac{X^n(a-bX)^n}{n!}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $b \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.*
2. *En considérant $Q_n(X) = P_n(X + \frac{a}{b})$ (d.h. Q_n ist eine Verschiebung von P_n), montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(\frac{a}{b}) \in \mathbb{Z}$.*

Indication : Pour la question 1 on pensera à utiliser la formule de Taylor, et on développera $(a - bX)^n$ grâce à la formule du binôme de Newton. On procédera ensuite par identification des coefficients d'ordre identique.