Préparation pour l'échange ENSAE/ENSAI/HU - 2003/2004

Devoir Libre n°6

Applications linéaires

A rendre le jeudi 15 janvier 2004

Cette série d'exercices se réfère au chapitre sur les Applications linéaires et Matrices distribué en cours. Les étudiants peuvent s'en inspirer librement et utiliser tout théorème énoncé dans ledit document sans avoir à le démontrer. Dans toute la suite, E, F et G désignent des $\mathbb{K}$-ev, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 1 (3 points) *Soit la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & ... & ... & 0 & 1 \\ ... & ... & 0 & 1 & 0 \\ ... & 0 & 1 & 0 & ... \\ 0 & 1 & 0 & ... & ... \\ 1 & 0 & ... & ... & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2, en déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 2 (3 points) *Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E. Montrer que :*

$$\begin{aligned} & Im(f) = Ker(f) && (1) \\ \Longleftrightarrow \quad & f \neq 0, f^2 = 0, n \text{ pair et } rg(f) = \frac{n}{2} && (2) \end{aligned}$$

Exercice 3 (3 points) *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur de E. Montrer que :*

$$\begin{aligned} & u \circ p = p \circ u \\ \Longleftrightarrow \quad & Ker(p) \text{ et } Im(p) \text{ stables par } u \end{aligned}$$

Exercice 4 (4 points) *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $f \neq 0$. Montrer que f est non bijectif si et seulement si il existe un endomorphisme g de E tel que $g \neq 0$ et $f \circ g = 0$.*
Indication : pour l'implication "$\Rightarrow$" faire intervenir un supplémentaire F de $Ker(f)$, et le projecteur sur $Ker(f)$ selon F.