**Préparation pour l'échange ENSAE/ENSAI/HU - 2003/2004**

# Devoirs Libres n°7 & 8

## Etude de fonctions et de suites réelles

**A rendre le mardi 27 janvier 2004**

Rappels :

- Une application $f : E \to \mathbb{R}$ est dite périodique si il existe $T$ tel que :

$$\forall x \in E, f(x+T) = f(x)$$

- $\forall x > 0,\ ln(x) < x$
- Dans $\mathbb{R}$, une suite *croissante* et *majorée* converge.

**Exercice 1 (4 points)** *Soit la fonction*

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \frac{ln(x)}{x^2} + x - 1 \end{cases}$$

1. *Donner son domaine de définition*
2. *Étudier les variations de $f$ et ses comportements aux limites*
3. *Tracer sa courbe représentative dans $\mathbb{R}^2$*

**Exercice 2 (2 points)** *Trouver tous les polynômes périodiques.*
*Indication : Supposer que $P$ est périodique de période $T \neq 0$ et considérer le polynôme $Q(x) = P(x) - P(0)$.*

**Exercice 3 (3 points)** 1. *Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

2. *Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et que $\lim_{n\to\infty}(u_n) \leq 3$.*

**Exercice 4 (3 points)** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction **bornée** telle que :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x+y) = f(x) + f(y)$$

*Montrer **par récurrence** sur $n$ que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^\star, f(x) = \frac{f(nx)}{x}$$

*En déduire que $f$ est la fonction nulle.*

**Exercice 5 (4 points)** *Etudier la suite de terme général :*

1. $u_n = \frac{n - ln(n)}{n^2+1}$
2. $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

*Indication : pour la seconde suite, chercher un encadrement de $u_n$ et appliquer le théorème des gendarmes.*

**Exercice 6 (4 points)** *Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :*

$$f^2 + f - 2Id_E = 0$$

1. *Montrer que $f$ est un automorphisme de $E$ et exprimer $f^{-1}$ comme combinaison linéaire de $f$ et $Id_E$.*
2. *Montrer que $E = ker(f - Id_E) \oplus Ker(f + Id_E)$.*

*Indication : Pour le deuxième point, procéder par "Analyse-Synthèse" pour montrer l'unicité et l'existence.*