



Préparation pour l'échange ENSAE/ENSAI/HU - 2003/2004

DEVOIRS LIBRES N°9

ÉTUDE DE SUITES RÉELLES

A rendre le jeudi 5 février 2004

Exercice 1 (5 points) Soit $a > 0$. Étudier la suite définie par :

$$u_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}}}}_{n \text{ radicaux superposés}}$$

Indications :

1. Définir u_n à l'aide d'une relation de récurrence faisant intervenir une fonction f .
2. En utilisant les propriétés de la fonction f , montrer que u_n est monotone et croissante.
3. Chercher les limites possibles de u_n .
4. Montrer que u_n est majorée en utilisant le résultat précédent.
5. Conclure.

Exercice 2 (5 points) 1. Étudier les variations de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

2. En déduire que pour tout $n \geq 3$, l'équation $(E) : x = n \cdot \ln(x)$ admet deux solutions réelles positives. On note u_n la plus petite solution de (E) , et on définit ainsi une suite $(u_n)_{n \geq 3}$.
3. Montrer que (u_n) est décroissante et converge vers $l \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que $l = 1$.
5. Déterminer un équivalent de $|u_n - 1|$.

Exercice 3 (1 point) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n}) = 1$.