ENSAE - Mathekurs

Correction du Devoir Libre n° 14

Exercice 1

(1)

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \sqrt[n]{n+k} \qquad \text{soit } \alpha_n = \ln u_n$$

$$\alpha_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) + \frac{n}{n}\ln n = \ln n + \int_0^1 \ln(1+x)dx + \epsilon(n) \quad \text{où } \lim_{n\to+\infty} \epsilon(n) = 0$$

$$\alpha_n = \ln n + 2\ln 2 - 1 + \phi(n) \qquad \text{Donc : } u_n = \exp(\alpha_n) = 4ne^{-1}e^{\epsilon(n)} \sim \frac{4n}{e} \quad \text{car } \lim_{n\to+\infty} e^{\epsilon(n)} = 1$$

(2)

$$v_n = \frac{1}{n}\left[(n+1)^{\frac{n+1}{n}} - (n-1)^{\frac{n-1}{n}}\right]$$

$$\text{On voit que : } \quad (n+1)^{\frac{1+n}{n}} = \exp\left(\frac{n+1}{n}\ln(n+1)\right)$$

$$\frac{n+1}{n}\ln(n+1) = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left[\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left[\ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

NB : la précédente notation, $o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$*, provient de :* $\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$

$$\text{De même : } \quad \frac{n-1}{n}\ln(n-1) = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$$\text{Donc} \quad v_n = \frac{1}{n}\exp(\ln n)\left[\exp\left(\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) - \exp\left(-\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)\right]$$

Comme $\lim \frac{\ln n}{n} = 0$, on peut effectuer un développement de exp au voisinage de 0 : $e^x = 1 + x + o(x)$

$$\text{Donc} \quad v_n = \frac{2\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \sim \frac{2\ln n}{n}$$

Exercice 2

(1)

f_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]n,+\infty[$ et $f_n'(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x-k)^2} < 0$. Ainsi, f_n décroît strictement sur $]n,+\infty[$.
$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim_{x\to n} f_n(x) = +\infty$.
f_n est donc une bijection de $]n,+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que :

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}_+^* \quad \exists! x_n \in]n,+\infty[\quad f_n(x_n)=\lambda$$

(2)

$$w_n = f_n(\alpha n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha n - k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha - \frac{k}{n}} \longrightarrow_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{dx}{\alpha - x} = \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) =^{\text{déf}} g(\alpha)$$

(3)

On voit que la fonction g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et $g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} = \frac{-1}{t(t-1)} < 0$: g est donc strictement décroissante sur $]1,+\infty[$

$$\text{On voit également que :} \qquad g(\alpha_0)=\lambda \Longleftrightarrow \alpha_0 = \frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1}$$

Posons $\epsilon > 0$. On voit que : $\lim_{n\to+\infty} f_n(n(\alpha_0-\epsilon)) = g(\alpha_0-\epsilon)$ [*d'après* (2)].
De plus, $g(\alpha_0-\epsilon) > g(\alpha_0) = \lambda$ $\quad$ [*car* $g \searrow\searrow$]
Donc $\exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad f_n(n(\alpha_0-\epsilon)) > \lambda = f_n(x_n)$ $\quad$ [*par définition d'une limite.*]
Le même raisonnement nous permet d'écrire que :

$$\exists N'\in\mathbb{N} \quad \forall n\geq N' \quad f_n(x_n) = \lambda < f_n(n(\alpha_0+\epsilon))$$

En prenant $N'' = \max(N,N')$, on peut écrire :

$$\forall n\geq N'' \quad f_n(n(\alpha_0-\epsilon)) > \lambda > f_n(n(\alpha_0+\epsilon))$$

$$\text{Donc :} \qquad \forall\epsilon>0 \quad \exists N''\in\mathbb{N} \quad \forall n\geq N'' \quad n(\alpha_0-\epsilon) < x_n < n(\alpha_0+\epsilon)$$

[*On a composé la précédente relation par* f^{-1} *qui* $\searrow\searrow$ *car* $f \searrow\searrow$]

$$\text{Ceci est la définition de :} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = \alpha_0$$

$$\text{Finalement,} \qquad x_n \sim n\alpha_0 = n\frac{e^\lambda}{e^\lambda-1}$$

Exercice 3

$g(0)=0$ et g est évidemment dérivable, de dérivée :

$$g'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -1 + 2x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\text{Donc :} \qquad g(x) = g(0) + \int_0^x g'(t)dt = -x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

Exercice 4

On se souvient (?) avoir vu en cours que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n \geq 0$$

$$\text{Donc} \quad y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \geq \frac{1}{n} \geq 0$$

Par ailleurs,

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ tq. $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2} > 0$: ainsi, $f \nearrow\nearrow$

Comme $\lim\limits_{+\infty} f = 0$, f est négative sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc aussi sur $\mathbb{N}^*$.

$(y_n)_{\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante et minorée. Elle est ainsi convergente.