ENSAE - Mathekurs

Correction du Devoir Libre n° 16 : Les séries de Fourier

1 - Fondements algébriques

1-1

$$f_n = \sum_{i \leq n} (e_i \bullet f) e_i \qquad \text{par définition de } f_n$$

$$\|f_n\|_2^2 = \sum_{i \leq n} (e_i \bullet f)^2 \qquad \text{par le théorème de Pythagore}$$

1-2
On voit que $\|f_{n+1}\|_2^2 - \|f_n\|_2^2 = (e_{n+1} \bullet f)^2 \geq 0$: la suite $\|f_n\|^2$ est croissante.
De plus, $\|f\|_2^2 - \|f_n\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 \geq 0$ par le théorème de Pythagore : $\|f_n\|_2^2$ est majorée. Elle est donc convergente.
On en déduit que $\|f_n\|_2 = \sqrt{\|f_n\|_2^2}$ converge également.
On a bien sûr : $\lim_{n \to +\infty} \|f_n\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$ *[cf. deux lignes plus haut]*
1-3
Le sens "$\Longleftarrow$" est trivial, il provient de la continuité de la norme euclidienne.
Sens "$\Longrightarrow$" :

$$\|f_n - f\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \|f_n\|_2^2} \quad \text{par Pythagore. On en déduit :}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n \to +\infty} f_n = f$$

CQFD
1-4
Le sens "$\Longrightarrow$" découle trivialement de 1-3
Sens "$\Longleftarrow$" :

$$F \text{ dense dans } E \qquad \Longrightarrow \qquad \forall f \in E \quad \exists (g_n)_{\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}} \quad \lim g_n = f$$

Quitte à réarranger les termes de la suite g_n, on peut supposer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n \in F_n$
Mais f_n est le projeté orthogonal de f sur F_n. C'est donc f_n qui minimise la distance de f à F_n. Ainsi, $||f - g_n||_2^2 \geq ||f - f_n||_2^2$ On peut donc écrire :

$$0 \leq ||f - f_n||_2^2 \leq ||f - g_n||_2^2 \longrightarrow_{n \to +\infty} 0$$

La suite f_n converge donc vers f. *CQFD*

2 - Le cœur du prolème

2-1
C'est trivial.
2-2
La bilinéarité, la symétrie et la positivité de $(\quad \bullet \quad)$ sont des propriétés triviales. Soit $h \in E$

$$(h \bullet h) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in [0, 2\pi] \quad h(x) = 0 \qquad \text{car } h \text{ est continue sur } \mathbb{R}$$

h étant 2π-périodique, on en déduit que ($\bullet$) est défini. C'est donc un produit scalaire.
2-3
Il y a dans cette question plusieurs points à vérifier.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1 \bullet \phi_n) = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos nx dx = 0 = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin nx dx = (1 \bullet \psi_n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (\phi_n \bullet \psi_n) = \frac{\lambda^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos nx \sin nx dx = \frac{\lambda^2}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin 2nx dx = 0$$

$$||\phi_n||_2^2 = \frac{\lambda^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx = \frac{\lambda^2}{2}$$

De même, on voit que $||\psi_n||^2 = \frac{\lambda^2}{2}$. Ainsi,

$$\lambda \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (1, \phi_n, \psi_n) \quad \text{est une famille othonormée}$$

2-4
On a fait dans la qustion précédente la plus grosse partie du travail. Il reste dans 2-4 à voir que :

$$m \neq n \quad \Longrightarrow \quad (\phi_m \bullet \psi_n) = \frac{\lambda^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx = \frac{\lambda^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0 \qquad \text{(fonction impaire)}$$

$$m \neq n \quad \Longrightarrow \quad (\psi_m \bullet \psi_n) = \frac{\lambda^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{\lambda^2}{\pi}\int_0^{2\pi} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) dx = 0$$

$$m \neq n \quad \Longrightarrow \quad (\phi_m \bullet \psi_n) = \frac{\lambda^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx = \frac{\lambda^2}{\pi}\int_0^{2\pi} (\cos(m-n)x + \cos(m+n)x) dx = 0$$

CQFD
2-5
Par définition, $\sum_{k \leq n} \alpha_n^2 + \beta_n^2 = ||f_n||_2^2 - (1 \bullet f)^2$. La série $\sum \alpha_n^2 + \beta_n^2$ est donc convergente puisque $||f_n||_2^2$ converge. $\sum \alpha_n^2$ et $\sum \beta_n^2$ sont donc individuellement convergentes.
2-6
D'après la partie 1, on peut écrire que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2 = \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2)$$

2-7

$$||\alpha_n \phi_n + \beta_n \psi_n||_\infty \leq |\alpha_n| + |\beta_n|$$

Si la série $\sum(|\alpha_n| + |\beta_n|)$ converge, alors d'après ce qui précède, $\sum(\alpha_n \phi_n + \alpha_n \phi_n)$ converge normalement. Elle converge donc aussi "au sens de la norme 2". On applique alors les questions 1-4 et 1-3.
CQFD

2-8

$$n > 0 \implies \alpha_n = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos nx f(x)dx = \frac{\lambda}{2\pi n}\int_0^{2\pi} \sin nx f'(x)dx = \frac{1}{n}(f' \bullet \psi_n)$$

$$\text{On voit que} \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \implies \frac{1}{2}(|a| - |b|)^2 \geq 0 \implies |ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

$$\text{Finalement,} \quad |\alpha_n| = \left|\frac{1}{n}(f' \bullet \psi_n)\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + (f \bullet \psi_n)^2\right)$$

Comme f' est continue, $\sum (f \bullet \psi_n)^2$ converge (d'après 2-5). De plus, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge aussi. Donc $\sum |\alpha_n|$ est convergente.
Même raisonnement pour $\sum |\beta_n|$. On peut donc appliquer 2-7. *CQFD*
2-9
Le sens "$\Longrightarrow$" est trivial.
Pour l'autre sens, on remarque que la condition de droite implique que tous les g_n et les f_n sont égaux ... comme ce sont des suites de fonctions convergentes, elles ont même limite.
2-10
Pour les deux "$\Longleftrightarrow$" le sens "$\Longrightarrow$" est évident.
Pour le sens "$\Longleftarrow$", il suffit de réécrire la propriété de parité en remarquant que la convergence en moyenne quadratique implique la convergence simple.

3 - Applications

3-1

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x) \qquad \text{[pas besoin de Fourier]}$$

$$g \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } g'(x) = -\frac{\sin x}{2 + \cos x} : \text{posons } z = e^{ix}$$

$$g'(x) = -\frac{z - \frac{1}{z}}{i(4 + z + \frac{1}{z})} = -i\frac{1 - z^2}{z^2 + 4z + 1} = i - \frac{i}{1 + \frac{z}{2+\sqrt{3}}} - \frac{i}{1 + \frac{z}{2-\sqrt{3}}}$$

Il est possible de décomposer la première fraction en série entière. Pour la seconde, c'est impossible tel quel, car $|z| = 1$ et donc $\left|\frac{z}{2-\sqrt{3}}\right| > 1$, et la fonction $z \mapsto \frac{1}{1+z}$ n'est pas développable en série entière en dehors du disque unité.
On pose donc $z' = \frac{1}{z} = \bar{z}$ et on remarque que :

$$\frac{-i}{1 + \frac{z}{2-\sqrt{3}}} = -i\bar{z}\left[\frac{2 - \sqrt{3}}{1 + (2-\sqrt{3})\bar{z}}\right] = -i + \frac{i}{1 + \frac{\bar{z}}{2+\sqrt{3}}}$$

Finalement,

$$g'(x) = -i\left(\frac{1}{1 + \frac{z}{2+\sqrt{3}}} - \frac{1}{1 + \frac{\bar{z}}{2+\sqrt{3}}}\right) = 2\Im\left(\frac{1}{1 + \frac{z}{2+\sqrt{3}}}\right) \quad \text{où } \Im \text{ désigne la partie imaginaire}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{z}{2+\sqrt{3}}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^k}{(2+\sqrt{3})^n} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k e^{ikx}}{(2+\sqrt{3})^k} \implies g'(x) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \sin kx}{(2+\sqrt{3})^k}$$

La convergence de cette série de fonctions est normale sur $\mathbb{R}$. On peut donc intervertir $\int$ et $\sum$:

$$f(x) = \xi + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}\cos kx}{k(2+\sqrt{3})^k} \qquad \text{où } \xi = f(0) - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(2+\sqrt{3})^k}$$

NB : il est possible de calculer ξ exactement en utilisant la technique vue dans le DL 15. Cela n'a cependant pas grand intérêt.

3-2

On note que la série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned}\sum (-1)^k \frac{\cos(2k+1)x + i\sin(2k+1)x}{(2k+1)!} &= \sum (-1)^k \frac{(e^{ix})^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin\left(e^{ix}\right) \\ &= \frac{1}{2i}(\exp(i(\cos x + i\sin x)) + \exp(-i(\cos x + i\sin x))) \\ &= \frac{1}{2i}\left[e^{-\sin x}(\cos(\cos x) + i\sin(\cos x)) - e^{\sin x}(\cos(\cos x) - i\sin(\cos x))\right]\end{aligned}$$

On prend la partie réelle, et :

$$\sum (-1)^k \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)!} = \frac{1}{2}\left(\sin(\cos x)e^{-\sin x} + \sin(\cos x)e^{\sin x}\right) = \sin(\cos x)\cdot\cosh(\sin x)$$

3-3

h est impaire : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n = 0$

$$\beta_n = (\psi_n \bullet h) = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx = \frac{(-1)^{n+1}\lambda}{n} \qquad \text{[par parties]}$$

Bessel-Parseval ici :

$$\lambda^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3\lambda^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

On remarque ensuite que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$

3-4

ξ est paire : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \beta_n = 0$

$\alpha_0 = (1 \bullet \xi) = \frac{1}{2}$

$$\alpha_n = (1 \bullet \phi_n) = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \xi(u)\cos nu du = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos nu du = \frac{\lambda \sin(n\pi/2)}{\pi n}$$

Ainsi, pour $n > 0$, $\alpha_{2n} = 0$ et $\alpha_{2n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}\lambda}{(2n+1)\pi}$

Bessel-Parseval :

$$\frac{1}{4} + \frac{\lambda^2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{2\pi}\pi = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

3-5
χ est paire : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \beta_n = 0$

$$\alpha_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) dx = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_n = (\chi \bullet \phi_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \cos nx dx = \frac{\lambda}{\pi^2 n^2}(1 - (-1)^n)$$

Pour $n > 0$, $\alpha_{2n} = 0$ et $\alpha_{2n+1} = -\frac{2\lambda}{\pi^2(2n+1)^2}$
Bessel-Parseval :

$$\frac{1}{4} + \frac{4\lambda^2}{\pi^4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)^2 dx = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$