

Feuille d'exercices 1

Prof. Melanie Schienle, Michael Kreutz

16 octobre 2009

1. Exercice, 6 Points

Soient A, B des propositions.

(a) Montrer que

$$(A \Rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

(b) Montrer que

$$(A \Leftrightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad (B \Rightarrow A \quad \wedge \quad A \Rightarrow B)$$

Ces deux propositions sont très importantes, car il s'agit des pistes de démonstrations très fréquents utilisées. On appelle (a) démonstration par contraposition. On utilise approche (b) souvent pour montrer une équivalence en deux étapes.

(c) Montrer que

$$(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \quad \Leftrightarrow \quad (A \Leftrightarrow C)$$

2. Exercice, 4 Points

(a) Formaliser la proposition à l'aide de \forall, \exists .

Pour chaque nombre naturel $k \in \mathbb{N}$, il y a des nombres naturels p et $q \in \{0, 1\}$ tels que k est la somme de q et le double de p .

(b) Nier la proposition $\exists! x : A(x)$ qui est définie par

$$(\exists x : A(x)) \wedge (\forall x \forall y : (A(x) \wedge A(y) \Rightarrow x = y)).$$

Indication : Utiliser que $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$.

3. Exercice, 6 points

(a) On considère trois ensembles A, B, C . Montrer que

$$((A \cup B) \subseteq (A \cup C) \quad \wedge \quad (A \cap B) \subseteq (A \cap C)) \quad \Rightarrow \quad (B \subseteq C).$$

(b) Soit J un ensemble d'indices et soit $(A_j)_{j \in J}$ une famille d'ensembles et soit B un ensemble.

Montrer que

$$\left(\bigcup_{j \in J} A_j \right) \cap B \quad \subseteq \quad \bigcup_{j \in J} (A_j \cap B).$$