Feuille d'exercices 11

Prof. Melanie Schienle, Xiaoyu Fei, Edith Laget

2010-01-09

1. Exercice 1, 3 points

   Etudier la suite de terme général

   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^3 + k^2}$$

2. Exercice 2, 3 points

   Soit (u_n) une suite bornée et une suite (v_n) une suite qui diverge vers $+\infty$. Montrez que

   $$u_n + v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

3. Exercice 3, 5 points

   Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

   a. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite l. Qu'en déduire pour (S_n) ?

   b. Pour $x \geq 0$, on note $f_n(x) = e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \geq 0, \quad f_n^{'}(x) = -f_{n-1}(x)$.

   c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \geq 0, \quad f_{2n}(x) \leq 0 \leq f_{2n+1}(x)$.

   d. En déduire la valeur de l.

4. Exercice 4, 5 points

   Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^*$. On pose $a_0 = a, \quad b_0 = b$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

   $$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

   Démonter que (a_n) et (b_n) sont adjacentes (leur limite commune s'appelle la moyenne arithmético-géométrique des suites (a_n) et (b_n)).