Feuille d'exercices 13

Prof. Melanie Schienle, Xiaoyu Fei, Edith Laget

2010-01-23

1. Exercice 1, 3 points

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

a. Etudier la monotonie de (S_n).
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ montrer que $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$
c. En déduire que (S_n) est convergente.

2. Exercice 2, 4 points

Montrer que tout fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Indication : *trouver à partir de f comment écrire une fonction paire et une fonction impaire. penser à utiliser $f(-x) = f(x)$ pour la partie partie, et $f(-x) = -f(x)$ pour la partie impaire.*

3. Exercice 3, 4 points

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$$

a. On pose $t_n = u_n - v_n$ et $s_n = u_n + v_n$, montrer que (t_n) et (s_n) sont deux suites géométriques.
b. Exprimer t_n en fonction de n et t_0, et s_n en fonction de n et s_0.
c. En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

4. Exercice 4, 5 points

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tell que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$.
a. Montrer que $f(0) = 0$.
b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x)$.
c. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$
d. En déduire $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}, f(px) = pf(x)$.
e. En déduire $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{Q}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$.