

Feuille d'exercices 14

Prof. Melanie Schienle, Xiaoyu Fei, Edith Laget

2010-02-05

1. Exercice 1, 3 points

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$u^2 \circ v - u \circ v \circ u + id = 0 \Rightarrow u \text{ est inversible}$$

2. Exercice 2, 3 points

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$(Keru = Imu) \Leftrightarrow (u^2 = 0 \text{ et } n = 2rg(u))$$

3. Exercice 3, 3 points

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie n , F un \mathbb{K} -ev de dimension finie p . Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que $rg(u) \leq \min(n, p)$

4. Exercice 4, 3 points

On se place dans $E = \mathbb{R}^4$. Soient les espaces $F = Vect((1, 2, 1, 1), (0, 1, 1, 1))$ et $G = \{(x, y, z, t) | x + y + z + t = 0 \text{ et } x = y\}$. Montrer que $E = F \oplus G$

5. Exercice 5, 4 points

Soient (e_1, e_2, \dots, e_n) une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$rg(u) = rg(u(e_1), \dots, u(e_n))$$