

Feuille d'exercices 3

Prof. Melanie Schienle, Michael Kreutz

31 octobre 2009

1. Exercice, 4 Points

Soient X, Y des ensembles et $f : X \rightarrow Y$ une application. Soient $A, B \subseteq X$ et $C, D \subseteq Y$. Montrer que

- (a) $C \subseteq D \Rightarrow f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$
- (b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- (c) $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$
- (d) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

2. Exercice, 4 points

Soient f, g des applications

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad n \mapsto n + 1$$
$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad n \mapsto \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0 \\ n - 1 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

- (a) Décider si les application f et g sont injectives ou surjectives avec démonstration ou contre exemple.
- (b) Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.
- (c) Commenter votre résultat avec une phrase.

3. Exercice, 4 points

Soit E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application vérifiant $f \circ f = f$. Montrer que :

- (a) f injective $\Rightarrow f = id_E$
- (b) f surjective $\Rightarrow f = id_E$

4. Exercice, 4 points

Soit E un ensemble et $(A)_{i \in I}$ une famille de parties de E . Montrer que :

$$E \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (E \setminus A_i)$$

5. Exercice, 4 points supplémentaires

Soit \mathcal{S} une relation binaire sur l'ensemble E . \mathcal{S} est réflexive et transitive mais pas symétrique. Considérons la relation \mathcal{R} sur E par :

$$x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y \wedge y\mathcal{S}x.$$

Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.