

Feuille d'exercices 4

Prof. Melanie Schienle, Michael Kreutz

6 novembre 2009

1. Exercice, 4 points

Dans \mathbb{N} , on définit la relation de divisibilité :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad n/m \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} : m = kn$$

- (a) Vérifier que cette relation définit un ordre partiel (une relation d'ordre) sur \mathbb{N} .
- (b) L'ensemble \mathbb{N} admet-il un plus petit et un plus grand élément pour cet ordre ?
- (c) Quels sont les éléments minimaux et maximaux de $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$?

2. Exercice, 4 points

Soit E un ensemble. Pour deux ensembles X, Y on définit la différence symétrique de X et Y par

$$X \Delta Y := X \setminus Y \cup Y \setminus X$$

- (a) Soient $A, X, Y, Z \subseteq E$.
Montrer que

$$X \setminus Y \subseteq A \quad \wedge \quad Y \setminus Z \subseteq A \quad \Rightarrow \quad X \setminus Z \subseteq A$$

- (b) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Prouver que la relation \mathcal{R}_A dans $\mathcal{P}(E)$ définie par :

$$B \mathcal{R}_A C \quad \Leftrightarrow \quad B \Delta C \subseteq A$$

est une relation d'équivalence.

3. Exercice, 4 points

Soit (G, \star) un groupe et X un ensemble. Soit G^X l'ensemble des applications de X dans G . Soit \odot l'application définie par

$$\odot : G^X \times G^X \rightarrow G^X, \quad (f \odot g)(x) = f(x) \star g(x)$$

Montrer que (G^X, \odot) est un groupe.

4. Exercice, 2 points

Soit (E, \star) un monoïde. Montrer que si un élément $x \in E$ possède un inverse, alors cet inverse est unique.

Indication : Raisonnement par l'absurde.

5. Exercice, 2

Décider (preuve ou contre-exemple) s'il s'agit des groupes :

- (a) $(\mathbb{N}, +)$
- (b) $(\mathbb{Z}, +)$
- (c) (\mathbb{R}, \cdot)
- (d) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$