

# Feuille d'exercices 5

Prof. Melanie Schienle, Michael Kreutz

15 novembre 2009

1. Exercice, 4 points

Soient deux entiers  $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . On a :

$$p \geq q \Leftrightarrow \exists f : [1, p] \rightarrow [1, q] \text{ surjective}$$

2. Exercice, 4 points

Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{[n(n+1)]^2}{4}$$

3. Exercice, 4 points

Vous avez un tableau de chocolat, que vous partagez selon la perforation en  $n$  pièces. Vous pouvez la casser seulement en prenant une pièce (avec  $m$  pièces de chocolat) à la fois. Combien de fois devez-vous la casser afin de la casser dans toutes ses pièces? Demontrez votre résultat.

4. Exercice, 4 points

Soient  $0 \leq p \leq n$  deux entiers. Les coefficients binômiaux vérifient les propriétés suivantes :

(a)

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

(b)

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}, \quad \text{si } p \geq 1$$

(c)

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$