

Feuille d'exercices 6

Prof. Melanie Schienle, Michael Kreutz

27 novembre 2009

1. Exercice, 4 points

Montrer que

$$\forall n \geq 2, \quad n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

2. Exercice, 4 points

On considère la fonction $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (dite d'Ackermann) définie par :

$$\begin{aligned} f(0, n) &= n + 1 \\ f(m, 0) &= f(m - 1, 1) \quad \text{pour } m \geq 1 \\ f(m, n) &= f(m - 1, f(m, n - 1)) \quad \text{pour } m, n \geq 1 \end{aligned}$$

Montrer :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad & f(1, k) = k + 2 \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad & f(2, k) = 2k + 3 \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad & f(3, k) = 2^{k+3} - 3 \end{aligned}$$

3. Exercice, 4 points

Soient deux réels $a, b \in \mathbb{R}$ et un entier $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

4. Exercice, 4 points

Déterminer que pour tous les nombres complexes $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$