Feuille d'exercices 7

Prof. Melanie Schienle, Xiaoyu Fei, Edith Laget

2009-11-27

1. Exercice 1, 4 points

   Démontrer la formule de Moivre

   $$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

   Démontrer les formules d'Euler

   $$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

2. Exercice 2, 2 points

   Démontrer que $e^{i\theta} + 1 = 2e^{i\frac{\theta}{2}} \cos\frac{\theta}{2}$ et trouver une formule similaire pour $e^{i\theta} - 1$

3. Exercice 3, 2 points

   Donner le module et l'argument des nombres complexes suivants

   $$z_1 = \sqrt{5} - i\sqrt{15} \qquad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{1-i} \qquad z_3 = \frac{5 + i11\sqrt{3}}{7 - i4\sqrt{3}}$$

4. Exercice 4, 4 points **Polynomes de Tchebytchev**

   Les polynomes de Tchebytchev sont les T_n définis de la manière suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$. Calculer les cinq premiers polynomes de Tchebytchev.
   Exemple : $T_1(X) = X$ car $T_1(\cos\theta) = \cos\theta = \cos(1 \times \theta)$

5. Exercice 5, 4 points

   Démontrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \frac{\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

   Indice : passer en notation « exponentielle imaginaire ».