

Feuille d'exercices 8

Prof. Melanie Schienle, Xiaoyu Fei, Edith Laget

2009-12-04

1. Exercice 1, 3 points

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sev de l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Démontrez vos réponses.

- (a) $F = \{f \in E \mid f(1) = 2f(0)\}$
- (b) $G = \{f \in E \mid f(0) = f(1) + 1\}$
- (c) $H = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1 - x)\}$

2. Exercice 2, 2 points

Soit E un espace vectoriel. Démontrer les propositions suivantes

- (a) Si $A \subset B \subset E$ alors $Vect(A) \subset Vect(B)$
- (b) Si F est un sev de E alors $Vect(F) = F$
- (c) $\forall A \subset E, Vect(Vect(A)) = Vect(A)$

3. Exercice 3, 3 points

Dans l'espace $E = \mathbb{R}^4$, on considère les espaces $F = Vect((1, 2, -1, 0); (0, 2, 0, 1))$ et $G = Vect((2, 0, 0, 1); (1, 0, 0, 1))$. F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

4. Exercice 4, 4 points

Dans l'espace vectoriel de fonctions $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on dénote P l'ensemble des fonctions paires et I l'ensemble des fonctions impaires. Montrer que $E = P \oplus I$.

5. Exercice 5, 4 points

Dans l'espace vectoriel de fonctions $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose pour $k \in \mathbb{N}$

$$f_k = \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x^k \end{array}$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, le système $S = (f_1, \dots, f_n)$ est libre.