Feuille d'exercices 9

Prof. Melanie Schienle, Xiaoyu Fei, Edith Laget

2009-12-11

Exercice 1, équation en arcsin, 4 points

Résoudre l'équation : $\arcsin(2x) - \arcsin(\sqrt{3}.x) = \arcsin(x)$

Remarque : ne pas oublier le domaine de définition de l'équation.

Exercice 2, *borne supérieure*, 4 points

Question 1

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées. On note

$$A+B = \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad \exists(a,b) \in A \times B, \quad x = a+b\}$$

Montrez que $A+B$ possède une borne supérieure et que :

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$$

Question 2

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions bornées. Montrez que

$$\sup_{x \in I} |(f+g)(x)| \leq \sup_{x \in I} |f(x)| + \sup_{x \in I} |g(x)|$$

A-t-on égalité en général ?

Exercice 3, *partie entière*, 4 points

Montrez que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$. En déduire $\mathbf{E}(\sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{k}})$

Exercice 4, *densité*, 4 points

Montrez que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque : Utliser la caractérisation mathématique de la densité, et prouver qu'il existe toujours un rationnel entre deux nombres réels.