ENSAE - Mathekurs

Devoir Libre n° 16 : Les séries de Fourier

1 - Fondements algébriques

Dans ce qui suit, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie. On suppose E muni du produit scalaire $(\quad \bullet \quad)$. La "norme 2" associée à $(\quad \bullet \quad)$ est notée $\| \quad \|_2$. On suppose qu'il existe une famille orthonormale $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E, c'est à dire qu'on suppose que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \quad i \neq j \Longrightarrow (e_i \bullet e_j) = 0 \qquad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (e_i \bullet e_i) = 1$$

Par ailleurs, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs de E, on dira que u_n converge vers U "au sens de la norme 2" SSI $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - U\|_2 = 0$

1-1

Soit $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $F_n = \text{Vect}(e_i)_{i\leq n}$. On note aussi f_n le projeté orthogonal de f sur F_n.

Exprimer f_n en fonction des e_i et des $(f \bullet e_i)$

Exprimer $\|f_n\|_2^2$ en fonction des $(f \bullet e_i)$

1-2

Montrer que la suite numérique $\|f_n\|_2$ est convergente

Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_2^2$ et $\|f\|_2^2$ *NB : cette relation est appelée "inégalité de Bessel"*

1-3

Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n \text{ existe} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f_n = f$$

NB1 : la limite de f_n s'entend "au sens de la norme 2"

NB2 : l'égalité de gauche s'appelle "égalité de Bessel-Parseval"

1-4

On note $F = \text{Vect}(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$

Montrer rapidement que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad F \text{ est dense dans } E$$

2 - Le cœur du problème

Dans cette partie 2, on définit E comme l'ensemble des fonctions réelles continues et 2π-périodiques. On définit $(\quad \bullet \quad)$ de la façon suivante :

$$\forall (h,g) \in E^2 \quad (h \bullet g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(u)g(u)du$$

On note 1 la fonction constante sur $\mathbb{R}$ égale à 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on note ϕ_n et ψ_n les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tq.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \phi_n(x) = \lambda\cos(nx) \quad \text{et} \quad \psi_n(x) = \lambda\sin(nx)$$

2-1

Montrer que E est un sev de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

2-2

Montrer que $(\quad \bullet \quad)$ est un produit scalaire sur E

2-3
Trouver une condition sur λ pour que les familles $(1, \phi_n, \psi_n)$ soient orthonormales.
Dans la suite du problème, on fixera λ d'après cette condition, en imposant de plus $\lambda > 0$.
2-4
En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1, \phi_1, ..., \phi_n, \psi_1, ..., \psi_n) \quad \text{est une famille orthonormale}$$

Quelle est la dimension de cette famille ?
2-5 Dans toute la suite de la partie 2, on fixe $f \in E$ et on note, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\alpha_0 = (1 \bullet f) \quad \alpha_n = (f \bullet \phi_n) \quad \beta_n = (f \bullet \psi_n)$$

Déduire de la partie 1 que les séries numériques $\sum \alpha_n^2$ et $\sum \beta_n^2$ sont convergentes
NB : les coefficients α_n et β_n sont appelés "coefficients de Fourier"
2-6
Pour tout le reste du problème, on admettra le résultat suivant, appelé "Théorème de Weierstrass trigonométrique" : Si on note $F = \text{Vect}(1, (\phi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}, (\psi_k)_{k \in \mathbb{N}^*})$, alors F est dense dans E
Ennoncer l'égalité de Bessel-Parseval dans le cas présent
2-7
On suppose, dans la question 2-7 UNIQUEMENT, que $\sum |\alpha_n| + |\beta_n|$ converge.
Montrer que la série de fonctions $\sum(\alpha_n \phi_n + \beta_n \psi_n)$ converge normalement vers $f - (1 \bullet f)$
NB : la convergence normale s'entend TOUJOURS au sens de $\| \quad \|_\infty$ et JAMAIS "au sens de la norme 2"
2-8
On suppose, dans la question 2-8 UNIQUEMENT, que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
Montrer que la série de fonctions $\sum(\alpha_n \phi_n + \beta_n \psi_n)$ converge normalement vers $f - (1 \bullet f)$
2-9
On fixe maintenant $g \in E$ et on note :

$$a_0 = (1 \bullet g) \quad a_n = (g \bullet \phi_n) \quad b_n = (g \bullet \psi_n)$$

Montrer que :

$$f = g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n = a_n \quad \text{et} \quad \beta_{n+1} = b_{n+1}$$

2-10
Montrer les deux équivalences suivantes :

$$f \text{ est paire} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \beta_n = 0$$

$$f \text{ est impaire} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n = 0$$

3 - Applications

Dans la partie 3, on admettra que si h est réglée, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors sa série de Fourier $(1 \bullet h) + \sum_{n \geq 1} [(h \bullet \phi_n)\phi_n + (h \bullet \psi_n)\psi_n]$ converge vers h. On admettra également que l'égalité de Bessel-Parseval s'applique à h.
Si en plus h est continue, on admettra que cette convergence est normale.

NB : Une fonction h continue par morceaux est dite "réglée" si, quand t_0 est un point de discontinuité de h, on a :

$$h(t_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t_0^+} h + \lim_{t_0^-} h\right)$$

3-1

Décomposer en séries de Fourier les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \sin^3 x \qquad g(x) = \ln(2 + \cos x)$$

Indication : pour g, on pourra d'abord décoposer g' en série de Fourier. Afin d'obetenir la décomposition de g', on pourra poser $z = e^{ix}$ et utiliser les séries entières.

3-2

A l'aide de fonctions usuelles, exprimer :

$$\sum_{p\in\mathbb{N}} (-1)^p \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)!}$$

Indication : on pourra chercher à calculer la quantité suivante, en utilisant les séries entières :

$$\sum_{p\in\mathbb{N}} (-1)^p \frac{\cos(2p+1)x + i\sin(2p+1)x}{(2p+1)!}$$

3-3

On définit une fonction h sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$h(-\pi) = h(\pi) = 0 \qquad \forall x \in]-\pi, \pi[\quad h(x) = x \qquad h \quad \text{est } 2\pi\text{−}\textit{périodique}$$

Calculer les coefficients de Fourier de h

A l'aide de l'égalité de Bessel-Parseval, calculer $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$

En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^2}$

3-4

On définit une fonction ξ sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \xi(x) = 1 \qquad \xi(\frac{\pi}{2}) = \xi(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \qquad \forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \bigcup \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[, \xi(x) = 0 \qquad \xi \text{ est } 2\pi\text{-périodique}$$

Calculer les coefficients de Fourier de ξ

A l'aide de l'égalité de Bessel-Parseval, calculer à nouveau $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^2}$

3-5

On définit une fonction χ sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\chi \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \qquad \forall x \in [-\pi, \pi] \quad \chi(x) = 1 - 2\frac{|x|}{\pi}$$

Calculer les coefficients de Fourier de χ

A l'aide de l'égalité de Bessel-Parseval, calculer $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^4}$ **et en déduire** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4}$