Préparation pour l'échange ENSAE/ENSAI/HU - 2003/2004

DEVOIR LIBRE N°2

ALGÈBRE : GÉNÉRALITÉS, ARITHMÉTIQUE, STRUCTURES, $\mathbb{R}$ & $\mathbb{C}$

A rendre le mardi 18 novembre 2003

Cette série d'exercices se réfère au chapitre sur le corps des complexes du polycopié d'algèbre. Les étudiants peuvent s'en inspirer librement et utiliser tout théorème énoncé dans ledit polycopié sans avoir à le démontrer. Chaque exercice rapporte 2 points.

Exercice 1 *Etudier la suite complexe* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $z_{n+1} = \frac{z_n}{2-z_n}$ *où* $0 < |z_0| < 1$ *(indication : étudier* $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$*).*

Exercice 2 *Soit* a *et* b *deux nombres complexes. Montrer que :*
$|a|^2+|b|^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(|a+b|^2+|a-b|^2\right)$*. Caractériser géométriquement cette égalité.*

Exercice 3 *Montrer que* $\left|\frac{1-\imath\cdot z}{1+\imath\cdot z}\right| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ *(raisonnez en distance).*

Exercice 4 *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et* (E) : $\left(\frac{z-\imath}{z+\imath}\right)^n = \frac{1+\imath\cdot a}{1-\imath\cdot a}$*. Montrer que si* $z \in \mathbb{C}$ *est solution de* (E) *alors* $\left|\frac{z-\imath}{z+\imath}\right| = 1$*. Que peut-on en déduire sur les solutions de* (E) *(raisonnez en distance) ? Résoudre* (E) *si* $a = 1$*.*

Exercice 5 *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *:*

$$z^5 = -\imath \qquad (1)$$

$$z^6 = -\frac{4}{1+\imath\cdot\sqrt{3}} \qquad (2)$$

Exercice 6 *Soit* $a \in \mathbb{C}$ *tel que* $|a| = 1$*. On note* $z_1, ..., z_n$ *les solutions de l'équation* $z_n = a$*. Montrer que les points du plan complexe d'affixes* $(1+z_1)^n, ..., (1+z_n)^n$ *sont alignés (d.h. Beweisen, dass diese Punkte eine Linie bilden).*