



Préparation pour l'échange ENSAE/ENSAI/HU - 2003/2004

---

## DEVOIR LIBRE N°3

LES ESPACES VECTORIELS

---

A rendre le jeudi 4 décembre 2003

Cette série d'exercices se réfère au chapitre sur les espaces vectoriels distribué en cours. Les étudiants peuvent s'en inspirer librement et utiliser tout théorème énoncé dans ledit document sans avoir à le démontrer. Dans toute la suite,  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -ev, où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 1 (2 points)** Montrer que la commutativité de la loi  $+$  est une conséquence des autres axiomes définissant un espace vectoriel, notamment de la distributivité. (Indication : développer  $(1+1) \cdot (\vec{x} + \vec{y})$  de deux façons différentes.)

**Exercice 2 (2 points)** Soit  $F$  un sous espace vectoriel (s.e.v.) de  $E$ . Montrer que  $H = (E \setminus F) \cup \{\vec{0}\}$  est un s.e.v. si et seulement si  $F = \{\vec{0}\}$  ou  $F = E$ .

**Exercice 3 (2 points)** Soient  $F$  et  $G_1$  deux s.e.v. de  $E$  tels que  $G_1 \subset F$ . Soit  $G_2$  un s.e.v. supplémentaire de  $G_1$  dans  $E$ . Montrer que  $F = G_1 \oplus (F \cap G_2)$ .

**Exercice 4 (4 points)** On note  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

- Montrer que  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  muni de l'addition usuelle est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- Montrer que la famille  $(\sin, \cos)$  est libre dans le  $\mathbb{R}$ -e.v.  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .
- Montrer que la famille  $\mathcal{F} = (x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos 2x)$  est libre dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .
- Montrer que la famille  $(f, g) = (x \mapsto e^x, x \mapsto x^2 + 1)$  est libre dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

**Exercice 5 (2 points)** Montrer que les familles :

$$(1, \cos(x), \cos(x)^2, \dots, \cos(x)^n)$$

$$(1, \sin(x), \sin(x)^2, \dots, \sin(x)^n)$$

sont libres dans le  $\mathbb{R}$ -ev  $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +)$ .