Préparation pour l'échange ENSAE/ENSAI/HU - 2003/2004

Devoir Libre n°4

Les polynômes

A rendre le jeudi 11 décembre 2003

Cette série d'exercices se réfère au chapitre sur les polynômes distribué en cours. Les étudiants peuvent s'en inspirer librement et utiliser tout théorème énoncé dans ledit document sans avoir à le démontrer. Dans toute la suite, $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (2 points) *Soit $A \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que les restes des divisions euclidiennes de A par X, $(X-1)$ et $(X+1)$ sont respectivement 1, 2 et 8. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par $X(X^2-1)$.*

Exercice 2 (2 points) *Soit $P(X) = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.*

1. *Vérifier que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est racine de P et préciser son ordre de multiplicité. Qu'en déduit-on sur $\bar{j} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$?*
2. *Comparer $P(X)$ et $P(-X)$.*
3. *Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}(X)$.*

Exercice 3 (2 points) *On pose $P_n(X) = \sum_{k=0}^{2n} X^k$.*

1. *Déterminer les racines de P_n dans $\mathbb{C}$.*
2. *En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) > 0$.*

Exercice 4 (3 points)

1. *Montrer que la famille $\left(1, X(X-1), X^2(X+1), X(X-1)^2\right)$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.*
2. *Montrer que la famille $((0,1,2),(2,1,3),(2,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*

Exercice 5 (3 points) *Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $F_\lambda = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : P(\lambda) = 0\}$. Montrer que F_λ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En déterminer une base. Quelle est sa dimension ?*