ENSAE - Mathekurs

Exercices supplémentaires sur l'intégration

NB : Dans ce qui suit, le symbole $\int$ *désigne une primitive QUELCONQUE de l'expression en* x *sous le signe intégral*

Exercice 1 : quelques règles techniques ...

Les règles suivantes sont connues sous le nom de "Règles de Bioche". Il s'agit de techniques permettant d'intégrer des fractions rationnelles en cos et sin. (ie. $f(\sin x, \cos x)$)

- Le changement de variable $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ permet toujours de se ramener à une intégrale "classique" de fraction rationnelle. Cependant, il est souvent long et calculatoire.
- Si $f(\sin x, \cos x)dx$ reste inchangée par la transformation $x \leftrightarrow -x$, on pose $u = \cos x$
- Si $f(\sin x, \cos x)dx$ reste inchangée par la transformation $x \leftrightarrow \pi + x$, on pose $u = \tan x$
- Si $f(\sin x, \cos x)dx$ reste inchangée par la transformation $x \leftrightarrow \pi - x$, on pose $u = \sin x$
- Si les trois changements précités fonctionnent, on peut poser $u = \cos 2x$ (souvent plus rapide)

Trouver les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x} \quad \int \frac{dx}{2 + \cos x} \quad \int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x} \quad \int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos^2 x} dx \quad \int \frac{dx}{\sin x(1 + 3\cos x)} \quad \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

Exercice 2 - Trouver les primitives suivantes :

$$\int e^{2x} \sin 3x dx \qquad \int \cos 3x \sin 2x dx \qquad \int \sqrt{1 - \cos x} dx \qquad \int (\ln x)^2 dx \qquad \int \frac{x dx}{\cos^2 x} \qquad \int \arctan x dx$$

Indication : une intégration par parties devrait suffire ...

Exercice 3

Trouver une relation de récurrence entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$, et cacluler $I_1(x)$:

$$I_n(x) = \int \frac{dx}{(x^3 + 1)^n}$$

Exercice 4

Soit f continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que : $\exists k \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) \leq k \int_0^x f(u) du$

Montrer que $f = 0$

Indication : On pourra utiliser la fonction g *tq.* $g(x) = e^{-kx} \int_0^x f(u) du$