ENSAE - Mathekurs

# Correction du Devoir Libre n° 12

## Exercice 1

(1)
Posons $t = 1 + u$, avec $|u| \ll 1 \quad dt = du$ et $u = t - 1$

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{du}{\ln(u+1)}\left(1 - \frac{1}{u+1}\right) = \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{u + u\varepsilon_2(u)}{u + u\varepsilon_1(u)}du = \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{1+\varepsilon_2(u)}{1+\varepsilon_1(u)}du$$

On remarque ensuite que $\dfrac{1+\varepsilon_2(u)}{1+\varepsilon_1(u)}$ est bornée au voisinage de 0. De plus, $\lim\limits_{x\to 1} x - 1 = 0 = \lim\limits_{x\to 1} x^2 - 1$

Finalement, $\lim\limits_{x\to 1} \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}\left(1 - \frac{1}{t}\right)$ existe et vaut 0

(2)

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln t} = [\ln|\ln t|]_x^{x^2} = \ln 2$$

D'après (1), on déduit que $\lim\limits_{x\to 1} \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ existe et vaut $\ln 2$

(3)
Soit $x > 0$

$$\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}dt = \int_x^{3x} \frac{t + t^2\varepsilon(t)}{t^2} = \int_x^{3x}\left(\frac{1}{t} + \varepsilon(t)\right)dt = \int_x^{3x}\frac{dt}{t} + \int_x^{3x}\varepsilon(t)dt = \ln 3 + \int_x^{3x}\varepsilon(t)dt$$

$\varepsilon$ est bornée au voisinage de 0, et $\lim\limits_{x\to 0^+} x = \lim\limits_{x\to 0^+} 3x = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}dt$ existe et vaut $\ln 3$

## Exercice 2

(1)
Supposons $\int_0^T f(t)dt = 0$ . Effectuons le changement de variable $u = \lambda x$, avec $\lambda > 0$

$$\int_a^b f(\lambda x)dx = \frac{F(\lambda b) - F(\lambda a)}{\lambda} \qquad \text{où } F \text{ désigne une primitive de } f$$

Par ailleurs, $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x+T) - F(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(v)dv = \int_0^T f(v)dv = 0$ : $F$ est ainsi $T-$périodique, et donc bornée sur $\mathbb{R}$. On en déduit que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(\lambda x)dx \text{ existe et vaut } 0 = \frac{b-a}{T}\int_0^T f(t)dt$$

(2)
Supposons $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)dt = c \neq 0$ . Posons $g : x \longmapsto f(x) - c$. On voit immédiatement que : $\displaystyle\int_0^T g(x)dx = 0$ et que $g$ est $T-$périodique.
D'après (1), $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(\lambda x)dx$ existe et vaut 0

$$\int_a^b f(\lambda x)dx = \int_a^b g(\lambda x)dx + (b-a)c \longrightarrow_{\lambda\to+\infty} c(b-a) = \frac{b-a}{T}\int_0^T f(u)du$$

*CQFD*

## Exercice 3

(1)

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\left(\frac{\sin x}{x-\sin x}\right)} = \exp\left[\frac{\sin x}{\sin x - x}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right] = \exp\left[\frac{x+o(x^2)}{x - x^3/6 + o(x^4) - x}\ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\right]$$

$$= \exp\left[\frac{1+o(x)}{-x^2/6+o(x^3)}\left(-\frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\right] = \exp\left[(1+o(x))\frac{1+o(1)}{1+o(x)}\right] \longrightarrow_{x\to 0} e$$

(2)
Posons $x = \frac{\pi}{4} + u$ avec $|u| \ll 1$

$$\tan(2x)\ln(\tan x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2u\right)\ln\left[\tan\left(u + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2u\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+2u\right)}\ln\left(\frac{1+\tan u}{1-\tan u}\right) = -\frac{\cos 2u}{\sin 2u}\ln\left(1 + \frac{2\tan u}{1-\tan u}\right)$$

Remarquons que $\tan u = u + o(u^2)$ et donc :

$$\ln\left[1 + \frac{2\tan u}{1-\tan u}\right] = \ln[1 + (2u + o(u^2))(1 + u + o(u))] = \ln(1 + 2u + o(u^2)) = 2u + o(u^2)$$

$$\text{Ainsi, }\ \tan(2x)\ln(\tan x) = -\frac{\cos 2u}{2u + o(u^2)}\cdot[2u + o(u^2)] = -\cos 2u\frac{1+o(u)}{1+o(u)} \longrightarrow_{u\to 0} -1$$

(3)

$$(x+a)^{\frac{1}{x}+1} - x^{1+\frac{1}{x+a}} = \exp\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln(x+a)\right] - \exp\left[\left(1 + \frac{1}{x+a}\right)\ln x\right]$$

$$= \exp\left(\ln x + \frac{\ln x}{x}\right)\left\{\exp\left[\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) + \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)\right] - \exp\left[\frac{-x\ln x}{x(x+a)}\right]\right\}$$

Posons $u = \frac{1}{x}$ $\quad 0 < u \ll 1$ car on s'intéresse à la limite de l'expression précédente quand $x \to +\infty$.

$$(x+a)^{\frac{1}{x}+1} - x^{1+\frac{1}{x+a}} = \frac{1}{u}\exp(-u\ln u)[au + o(u)] \longrightarrow_{u\to 0} a$$

(4)

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left[\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right] = \exp\left[\frac{1}{x^2}\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)\right] = \exp\left[\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\right]$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{6}+o(1)\right) \longrightarrow_{x\to 0} \exp\left(-\frac{1}{6}\right)$$

(5)

$$\left(1+3\tan^2 x\right)^{\frac{1}{x\sin x}} = \exp\left[\frac{\ln(1+3\tan^2 x)}{x\sin x}\right] = \exp\left[\frac{\ln(1+3[x+o(x^2)]^2)}{x^2+o(x^3)}\right] = \exp\left[\frac{\ln[1+3x^2+o(x^3)]}{x^2+o(x^3)}\right]$$

$$= \exp\left[\frac{3x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^3)}\right] = \exp\left[\frac{3+o(1)}{1+o(x)}\right] \longrightarrow_{x\to 0} e^3$$