ENSAE - Mathekurs

Correction du Devoir Libre n° 13

Exercice 1

(1)

$$[\ln(1+x)]^2 = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 = x^2 + \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4) = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)$$

(2)

$$\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right) = -\ln(\cos x) = -\ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

(3)
On distingue deux cas :
n est pair : Alors $|x|^n = x^n = x^n + o(x^{n+1})$
n est impair : $|x|^n$ admet alors un développement limité à tout ordre $m < n$, mais pas à l'ordre n
(4)
$\sqrt{x}$ n'admet au voisinage de 0 de développement limité qu'à l'ordre 0
(5)
On sait qu'au voisinage de 0, $\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})$. Ainsi,

$$f(x) = \ln\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = \ln\left(e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})\right) = x + \ln\left(1 - e^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})\right)$$

$$= x - e^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1}) = x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1}) \quad \text{en remarquant que : } e^{-x} = 1 + o(1)$$

(6)

$$2\sin(5x^2) = 10x^2 + o(x^5)$$

$$7\sqrt{1-x} = 7 - 7\frac{x}{2} - 7\frac{x^2}{8} - 7\frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

$$-4\cos x = -4 + 2x^2 + o(x^3)$$

$$-\frac{3}{1+x} = -3 + 3x - 3x^2 + 3x^3 + o(x^3)$$

$$\text{Ainsi,} \quad 2\sin(5x^2) + 7\sqrt{1-x} - 4\cos x - \frac{3}{1+x} = -\frac{x}{2} + \frac{65}{8}x^2 + \frac{41}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\text{On sait que :} \quad \tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\text{Finalement,} \quad 3\tan\left[2\sin(5x^2) + 7\sqrt{1-x} - 4\cos x - \frac{3}{1+x}\right] = -\frac{3}{2}x + \frac{195}{8}x^2 + \frac{121}{16}x^3 + o(x^3)$$

Exercice 2

Posons $\phi(x,h) = \dfrac{1}{h^3}\left[f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)\right]$

$$f(x+3h) = f(x) + 3hf'(x) + \frac{9}{2}h^2 f''(x) + \frac{9}{2}h^3 f'''(x) + o(h^3)$$
$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \frac{4}{3}h^3 f'''(x) + o(h^3)$$
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + o(h^3)$$

Donc $\phi(x,h) = f'''(x) + o(1) \longrightarrow_{h\to 0} f'''(x)$

Exercice 3

Posons $\varphi(0) = 0$ et pour $x \neq 0$, $\quad \varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) = \dfrac{f(x)}{x} - f'(0)$. Par définition de $f'(0)$, $\lim\limits_{0} \varphi = 0$ et φ est continue sur [0,1]

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) = x\varphi(x) + xf'(0) \qquad \Longrightarrow \qquad f\left(\frac{1}{n+kp}\right) = \frac{1}{n+kp} \cdot \varphi\left(\frac{1}{n+kp}\right) + f'(0)\frac{1}{n+kp}$$

$$\Longrightarrow \qquad u_n = \underbrace{f'(0)\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+kp}}_{=w_n} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+kp} \cdot \varphi\left(\frac{1}{n+kp}\right)}_{=v_n}$$

$$|v_n| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+kp} \cdot \sup_{[0,1/n]} |\varphi| \leq \sup_{[0,1/n]} |\varphi| \cdot \frac{n+1}{n}$$

Or $\quad \sup\limits_{[0,1/n]} |\varphi| \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \quad$ car φ est continue en 0 et $\varphi(0) = 0 \qquad$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

$$\text{Par ailleurs,} \quad w_n = f'(0)\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}p} \longrightarrow_{n\to+\infty} f'(0)\int_0^1 \frac{d\lambda}{1+\lambda p} = \frac{f'(0)}{p}\ln(1+p)$$

$$\text{Ainsi, } u_n \text{ converge et :} \quad \lim u_n = \frac{f'(0)}{p}\ln(1+p)$$

Exercice 4

$$F(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)dt = \int_0^x tf(t)dt + \int_x^1 xf(t)dt$$

F est bien entendu définie sur [0,1]. La forme (intégrale) de F nous assure qu'elle est $\mathcal{C}^1$ sur [0,1].

$$\forall x \in [0,1] \quad F'(x) = xf(x) - xf(x) + \int_x^1 f(u)du = \int_x^1 f(u)du$$

F' est donc $\mathcal{C}^1$ sur [0,1] (et ainsi, F est $\mathcal{C}^2$ sur [0,1]) Par définition de F, $F(0) = 0$ (évident). F est donc **LA** primitive de F' qui s'annule en 0. D'après la forme précédente de F',

$$F(x) = \int_0^x F'(u)du = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t)dt\right) du$$