ENSAE - Mathekurs

Correction du Devoir Libre n° 15

Exercice 1

Cet exercice a été corrigé en cours. On n'en donnera ici que les deux idées principales. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, cet exercice se résume en fait aux propriétés de convergence, et au calcul des sommes :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k^n e^{-k}$$

Cette somme converge. En effet :

$$k^n e^{-k} = \underbrace{k^n \exp\left(-\frac{k}{2}\right)}_{=u_k} \exp\left(-\frac{k}{2}\right)$$

$\lim u_k = 0$: ce résultat est connu. Par suite, $k^n e^{-k} = o\left(e^{-\frac{k}{2}}\right)$ qui est le terme général d'une série convergente.
Il reste à calculer sa somme. En définissant $\phi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ tq. $\phi(x) = \frac{1}{1-e^{-x}} = \sum e^{-kx} = \sum \phi_k(x)$, on peut montrer que ϕ est $\mathcal{C}^\infty$ et que ses dérivées succesives convergent normalement sur tout compact inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \phi^{(n)}(x) = \sum \phi_k^{(n)}$$

En remarquant que $k^n e^{-k} = (-1)^n \phi_k^{(n)}(1)$, on en déduit que :

$$\sum k^n e^{-k} = (-1)^n \sum \phi_k^{(n)}(1) = (-1)^n \phi^{(n)}(1)$$

Il suffit ensuite de calculer les valeurs successives de $\phi^{(n)}(1)$ pour conclure.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, il est évident que les valeurs prises par $(u)_\mathbb{N}$ pour les $k < n_0$ ne présentent aucun intérêt pour la convergence ou la divergence du produit $\prod(1+u_n)$ – à part bien sûr si $\exists n_1 < n_0$ tq. $u_{n_1} + 1 = 0$, auquel cas le produit infini diverge par définition. On ne considérera dans la suite que les $n \geq n_0$.
1
Soit $p_n = \prod_{k=n_0}^{n} (1+u_k)$ $_n$ converge SSI $\lim p_n = \alpha > 0$ SSI $\lim \ln p_n = \ln l$ *[car exp et ln sont continues.]*
Or $\ln p_n = \sum_{k=n_0}^{n} \ln(1+u_k)$ *CQFD*
2

$$\sum u_k^2 \quad \text{converge} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim u_k = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \ln(1+u_k) = u_k - \frac{u_k^2}{2} + o(u_k^2)$$

Or on sait que $\sum u_k^2$ converge, donc $\sum o(u_k^2)$ aussi. Finalement, $\sum \ln(1+u_k)$ converge SSI $\sum u_k$ converge. Et la convergence de $\sum \ln(1+u_k)$ est équivalente à celle de $\prod(1+u_k)$ d'après 1. *CQFD*
3

Si $\sum |u_k|$ converge, alors $\sum u_k^2$ aussi. On peut alors appliquer directement la question 2 pour conclure.
4
on utilise directement les questions 2 et 3.
5

$$\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)=0 \quad \text{donc le produit diverge}$$

Il peut être inétressant d'examiner $\prod_{n\geq 2}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$
On voit que :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

Or on sait que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (série alternée) et que $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ aussi (critère de Riemann). Par contre $\sum \frac{1}{2n}$ diverge. La somme, et par suite le produit, divergent.

$$\ln\left[\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)\right]=2\ln\left(1+\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)$$

On applique le 2 : le produit converge.

$$1+\ln(n^2+1)-2\ln n=1+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

On applique la même technique et le produit converge.