ENSAE-ENSAI Mathekurs -- Correction DL 9 Exo 3

On définit les suites u et v de la façon suivante : $u_0 > 0$ et $v_o > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \tag{1}$$
$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \tag{2}$$

(a) Montrer que u et v sont bien définies pour tout n.
(b) Montrer que u et v convergent vers la même limite

(a)
Posons $P(n)$ la proposotion, pour $n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$ et $v_n > 0$
$P(0)$ est vrai
Supposons $P(n)$ vrai.
alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ existe et est bien positif.
De même pour v_{n+1}
$P(n+1)$ est donc vrai.
Récurrence terminée.

(b)
si u et v convergent vers l et m, alors on a :

$$m = \frac{m+l}{2} \tag{3}$$

Donc $m = l$. Reste à prouver la convergence de u et de v :
Posons $Q(n)$ la proposition : $u_n \leq v_n$ et $v_{n+1} \leq v_n$ et $u_n \leq u_{n+1}$.
Montrons que $Q(1)$ est vrai . En effet :

$$v_1 - u_1 = \frac{1}{2}(v_0 + u_0 - 2\sqrt{u_0}\sqrt{v_0}) = \frac{1}{2}(\sqrt{v_0} - \sqrt{u_0})^2 \geq 0 \tag{4}$$

$$v_2 - v_1 = \frac{v_1 + u_1}{2} - v_1 = \frac{u_1 - v_1}{2} \leq 0 \tag{5}$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \sqrt{\frac{v_1}{u_1}} \geq 1 \tag{6}$$

$Q(1)$ est donc vrai.
Supposons $Q(n)$ vrai.

$$v_{n1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + u_n - 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n}) = \frac{1}{2}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2 \geq 0 \tag{7}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{v_n + u_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0 \tag{8}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{v_n}{u_n}} \geq 1 \tag{9}$$

$Q(n+1)$ est donc vrai , et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $Q(n)$ est vrai.
A partir du rang 1, $v \nearrow$, $u \searrow$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_1 \leq u_n \leq v_n \leq v_1 \tag{10}$$

u est croissante majorée et v est décroissante minorée. Les suites convergent.
CQFD