Devoir à la maison n°1

A rendre le lundi 13 novembre au plus tard

Exercice 1 : logique

Soient P, Q, R trois propositions. Montrer en dressant la table de vérité que

a) $P\ ou (Q\ et\ R) \Leftrightarrow (P\ ou\ Q)\ et\ (P\ ou\ R)$

b) $non\ (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P\ et\ non\ Q)$

Exercice 2 : quantificateurs

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Nier les propositions suivantes :

a) $\forall x \in I, f(x) \neq 0$

b) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I / f(x) = y$

c) $\exists M \in \mathbb{R} / \forall x \in I, |f(x)| \leq M$

d) $\forall (x, y) \in I^{2,} (x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))$

e) $\forall (x, y) \in I^{2,} (f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)$

f) $\forall x \in I, (f(x) > 0) \Rightarrow (x \leq 0)$

Exprimer en français la signification des propositions trouvées

Exercice 3 : surjectivité, injectivité

Soient E,F,G trois ensembles et f, g, h trois fonctions, avec $f : E \to F\ g : F \to G\ et\ h : G \to E$
Montrer que si h o g o f est injective et que g o f o h et f o h o g sont surjectives, alors f, g et h sont bijectives

Exercice 4 : ensemble des parties de E

Soit E un ensemble. Soient $(A, B) \in P(E)^2$

$$et\ f : \left\{ \begin{array}{c} P(E) \to P(A) \times P(B) \\ X \to (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right.$$

a) Montrer que f est injective ssi A U B = E

b) Montrer que f est surjective ssi A ∩ B = Ø