

# Feuille d'exercices 4

Prof. Melanie Schienle, Michael Kreutz

6 novembre 2009

## 1. Exercice, 4 points

Dans  $\mathbb{N}$ , on définit la relation de divisibilité :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad n/m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : m = kn$$

- (a) Vérifier que cette relation définit un ordre partiel (une relation d'ordre) sur  $\mathbb{N}$ .
- (b) L'ensemble  $\mathbb{N}$  admet-il un plus petit et un plus grand élément pour cet ordre?
- (c) Quels sont les éléments minimaux et maximaux de  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ?

## 2. Exercice, 4 points

Soit  $E$  un ensemble. Pour deux ensembles  $X, Y$  on définit la différence symétrique de  $X$  et  $Y$  par

$$X \Delta Y := X \setminus Y \cup Y \setminus X$$

- (a) Soient  $A, X, Y, Z \subseteq E$ .  
Montrer que

$$X \setminus Y \subseteq A \quad \wedge \quad Y \setminus Z \subseteq A \quad \Rightarrow \quad X \setminus Z \subseteq A$$

- (b) Soit  $A \in \mathcal{P}(E)$ . Prouver que la relation  $\mathcal{R}_A$  dans  $\mathcal{P}(E)$  définie par :

$$B \mathcal{R}_A C \Leftrightarrow B \Delta C \subseteq A$$

est une relation d'équivalence.

## 3. Exercice, 4 points

Soit  $(G, \star)$  un groupe et  $X$  un ensemble. Soit  $G^X$  l'ensemble des applications de  $X$  dans  $G$ . Soit  $\odot$  l'application définie par

$$\odot : G^X \times G^X \rightarrow G^X, \quad (f \odot g)(x) = f(x) \star g(x)$$

Montrer que  $(G^X, \odot)$  est un groupe.

4. Exercice, 2 points

Soit  $(E, \star)$  un monoïde. Montrer que si un élément  $x \in E$  possède un inverse, alors cet inverse est unique.

*Indication : Raisonnement par l'absurde.*

5. Exercice, 2

Décider (preuve ou contre-exemple) s'il s'agit des groupes :

- (a)  $(\mathbb{N}, +)$
- (b)  $(\mathbb{Z}, +)$
- (c)  $(\mathbb{R}, \cdot)$
- (d)  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$