Lösung Klausur 2006 / 1. Termin

Aufgabe 1 (25 Punkte)

1. $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$

2. (a) $X'X = \begin{bmatrix} 10 & 50 \\ 50 & 310 \end{bmatrix}, \qquad X'y = \begin{bmatrix} 200 \\ 1172 \end{bmatrix}$

   (b) $(X'X)^{-1} = \underbrace{\frac{1}{10 \cdot 310 - 50^2}}_{\frac{1}{600}} \begin{bmatrix} 310 & -50 \\ -50 & 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 31 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \widetilde{\beta} = (X'X)^{-1}X'y = \frac{1}{60} \underbrace{\begin{bmatrix} 31 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 1172 \end{bmatrix}}_{= \begin{bmatrix} 31 \cdot 200 - 5 \cdot 1172 \\ -5 \cdot 200 + 1172 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 340 \\ 172 \end{bmatrix}} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 340 \\ 172 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/3 \\ 43/15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.667 \\ 2.867 \end{bmatrix}$$

3. $R^2 = \dfrac{b'X'y - T(\bar{y})^2}{y'y - T(\bar{y})^2}$

   - $b'X'y = \frac{1}{60\cancel{0}} [340\cancel{0} \quad 172\cancel{0}] \begin{bmatrix} 200 \\ 1172 \end{bmatrix} = \frac{269584}{60} = 4493.067$
   - $T\bar{y}^2 = \frac{1}{T} \left(\sum y_t\right)^2 = \frac{1}{10} 200^2 = 4000$

   $\Longrightarrow \quad R^2 = \dfrac{4493.067 - 4000}{4558 - 4000} = 0.884$

   88,4% der Variabilität von y_t werden durch das lineare Regressionsmodell erklärt.

4. ML–Schätzer ist BUE (und nicht nur BLUE)

5. $\hat{y}_0 = x_0' \widetilde{\beta} = [1 \quad 5.5] \begin{bmatrix} 5.667 \\ 2.867 \end{bmatrix} = 5.667 + 5.5 \cdot 2.867 = 21.433$

6. Prognoseintervall: $\quad x_0' \tilde{\beta} \pm z^{1-\alpha/2} \sigma \sqrt{1 + x_0'(X'X)^{-1} x_0}$

   - Es gilt: $x_0' \widetilde{\beta} = 21.433$; $\sigma^2 = 7$; $z^{1-\alpha/2} = z^{0.975} = 1.96$ und

$$\begin{aligned} x_0'(X'X)^{-1}x_0 &= [1 \quad 5.5] \frac{1}{60\cancel{0}} \begin{bmatrix} 31\cancel{0} & -5\cancel{0} \\ -5\cancel{0} & 1\cancel{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5.5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{60} \underbrace{[31 - 5.5 \cdot 5 \quad -5 + 5.5]}_{[3.5 \quad 0.5]} \begin{bmatrix} 1 \\ 5.5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{60}(3.5 + 0.5 \cdot 5.5) = \frac{6.25}{60} = 0.104 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad z^{1-\alpha/2} \sigma \sqrt{1 + x_0'(X'X)^{-1}x_0} = 1.96 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{1.104} = 5.449$$

$$\Rightarrow \quad PI(y_0, 0.95) = [21.433 - 5.449,\ 21.433 + 5.449] = [15.985,\ 26.882]$$

7. Punkt- vs. Intervallschätzung: Intervallschätzung enthält Informationen über Unsicherheit der Punktschätzung.

8. $\hat{y}_0 = x_0'\tilde{\beta}$ ist Prognose für $y_0 = x_0'\beta + e_0$ und $\mathbb{E}\tilde{\beta} = \beta$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[\hat{e}_0\right] = \mathbb{E}\left[\hat{y}_0 - y_0\right] = \mathbb{E}\left[x_0'(\widetilde{\beta} - \beta) - e_0\right] = x_0'\underbrace{\mathbb{E}\left[\widetilde{\beta} - \beta\right]}_{=\mathbb{E}\left[\widetilde{\beta}\right]-\beta} - \underbrace{\mathbb{E}\left[e_0\right]}_{=0} = 0 + 0 = 0$$

Aufgabe 2 (25 Punkte)

1. LNL und LNK üben einen signifikanten Einfluss aus, weil die p-Werte (0.0324 bzw. 0.0647) zum Testen von

$$H_0 : \beta_{LNL} = 0 \; vs. \; H_1 : \beta_{LNL} \neq 0,$$

bzw.

$$H_0 : \beta_{LNK} = 0 \; vs. \; H_1 : \beta_{LNK}$$

kleiner als das angenommene Signifikanzniveau 0.10 sind.

2. Hypothese $\quad H_0 : \beta_{LNL} + \beta_{LNK} = 1 \Leftrightarrow R\beta = r \quad$ mit

$$R = [0\,1\,1\,0\,0\,0], \;\; \beta = [\beta_C \; \beta_{LNL} \; \beta_{LNK} \; \beta_{LNL2} \; \beta_{LNK2} \; \beta_{LNLLNK}]', \;\; r = 1.$$

Wir können entweder einen F-Test oder einen t-Test durchführen, weil $J = 1$ gilt und die Fehlervarianz unbekannt ist.

(i) <u>t-Test</u>

$$\lambda_1 = \frac{R\tilde{\beta} - 1}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(R\tilde{\beta})}} \underset{H_0}{\sim} t_{T-K} = t_{25-6} = t_{19},$$

$$R\tilde{\beta} - 1 = \tilde{\beta}_{LNL} + \tilde{\beta}_{LNK} - 1 = 3.503 - 1.849 - 1 = 0.654,$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathrm{Var}}(R\tilde{\beta}) &= \widehat{\mathrm{Var}}(\tilde{\beta}_{LNL}) + \widehat{\mathrm{Var}}(\tilde{\beta}_{LNK}) + 2\,\widehat{\mathrm{Cov}}(\tilde{\beta}_{LNL}, \tilde{\beta}_{LNK}) \\ &= 2.302122 + 0.889066 - 2 \cdot 1.095606 \approx 0.9998 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{0.654}{\sqrt{0.998}} \approx 0.654$$

Entscheidung:

$$\lambda_1 = 0.654 < t_{T-K}^{1-\alpha/2} = t_{19}^{0.975} = 2.093$$

$\Rightarrow$ Wir lehnen H_0 auf 5% Signifikanzniveau nicht ab.

(ii) <u>F-Test</u>

$$\lambda_2 = \frac{(R\tilde{\beta} - r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\tilde{\beta} - r)}{J\hat{\sigma}^2} = \frac{(R\tilde{\beta} - 1)^2}{[R\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}R']} \underset{H_0}{\sim} F_{J,T-K} = F_{1,19},$$

Offensichtlich gilt:

$$\lambda_2 \overset{!}{=} \lambda_1^2 = 0.654^2 \approx 0.428,$$

und H_0 wird nicht verworfen, weil

$$\lambda_2 = 0.428 < F_{J,T-K}^{1-\alpha} = F_{1,19}^{0.95} = 4.38(\overset{!}{=} (t_{19}^{0.975})^2).$$

3. 95% Konfidenzintervall für β_{LNK}: $\quad [\tilde{\beta}_{LNK} \pm t_{T_K}^{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{\tilde{\beta}_{LNK}}]$.

   Es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{LNK} &= -1.849, \\ \hat{\sigma}_{\tilde{\sigma}_{LNK}} &= 0.943 \\ t_{T-K}^{1-\alpha/2} &= t_{19}^{0.975} = 2.093, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathrm{KI}(\tilde{\beta}_{LNK}, 0.95) &= [-1.849 - 2.093 \cdot 0.943, -1.849 + 2.093 \cdot 0.943] \\ &= [-3.823, 0.125] \end{aligned}$$

4. Hypothese

$$H_0 : \beta_{LNL} \leq 1 \quad vs. \quad H_1 : \beta_{LNL} > 1$$
$$\alpha = 0.05 \ , \quad \sigma^2 = 0.04$$

   Wir führen hier einen einseitigen z-Test durch, weil wir unter der Nullhypothese nur eine Restriktion testen und die Fehlervarianz bekannt ist.

$$\begin{aligned} z \quad &= \quad \frac{\widetilde{\beta}_{LNL} - \beta_{LNL}^0}{\sigma_{\widetilde{\beta}_{LNL}}} = \frac{\widetilde{\beta}_{LNL} - \beta_{LNL}^0}{\sigma \sqrt{(X'X)_{2,2}^{-1}}} = \frac{\widehat{\sigma} \left(\widetilde{\beta}_{LNL} - \beta_{LNL}^0 \right)}{\sigma \sqrt{\widehat{\sigma}^2 \, (X'X)_{2,2}^{-1}}} = \frac{\widetilde{\beta}_{LNL} - \beta_{LNL}^0}{\frac{\sigma}{\hat{\sigma}} \hat{\sigma}_{\tilde{\beta}_{LNL}}} \\ &= \quad \frac{3.503 - 1}{\sqrt{0.04 \frac{1.517}{0.166}}} = \frac{2.503}{0.2 * 9.139} = \frac{2.503}{1.828} \approx 1.37. \end{aligned}$$

   Kritischer Wert: $z^{1-\alpha} = z^{0.95} = 1.645$.

   Entscheidung:

$$z = 1.37 \leq 1.645 = z^{1-\alpha},$$

   $\Rightarrow$ Lehne H_0 auf 5% Signifikanzniveau nicht ab.

   Wir würden H_0 zu einem Signifikanzniveau α^* gerade noch annehmen, falls $z_{\text{obs.}} = z^{1-\alpha^*}$ wäre ($z_{\text{obs.}}$ ist der beobachtete Wert der Teststatistik) . Wir benutzen die Tabelle für die Verteilungsfunktion Φ, da z standardnormalverteilt ist:

$$\begin{aligned} z_{\text{obs.}} &= 1.37 \\ \Rightarrow \quad \mathbb{P}(z > z_{\text{obs.}}) &= \mathbb{P}(z > 1.37) \\ &= 1 - \mathbb{P}(z \leq 1.37) \\ &= 1 - \underbrace{\Phi(1.37)}_{=0.9145} = 0.0855. \end{aligned}$$

   Damit würden wir auf einem Signifikanzniveau von 8.5% die Nullhypothese gerade noch annehmen.

5. Hypothese

$$\begin{gathered} H_0 : \ \beta_{LNL2} = \beta_{LNK2} = \beta_{LNLLNK} = 0 \Leftrightarrow R\beta = r \\ vs. \\ H_1 : R\beta \neq r, \end{gathered}$$

wobei

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \tilde{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_C \\ \beta_{LNL} \\ \beta_{LNK} \\ \beta_{LNL2} \\ \beta_{LNK2} \\ \beta_{LNLLNK} \end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R\widetilde{\beta} - r = \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_{LNL2} \\ \tilde{\beta}_{LNK2} \\ \tilde{\beta}_{LNLLNK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.717 \\ 0.205 \\ 0.144 \end{bmatrix}.$$

Es gilt allgemein:

$$\lambda = \frac{(R\tilde{\beta})'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\tilde{\beta})}{J\hat{\sigma}^2} \underset{H_0}{\sim} F_{J,T-K} = F_{3,19}.$$

$$\lambda = \frac{\begin{bmatrix} -0.717 & 0.205 & 0.144 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.176 & 2.105 & 3.002 \\ 2.105 & 5.720 & 6.580 \\ 3.002 & 6.580 & 8.563 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.717 \\ 0.205 \\ 0.144 \end{bmatrix}}{3 \cdot (0.166)^2}$$

$$= 2.072$$

Entscheidung:

$$\lambda = 2.07 < F^{1-\alpha}_{J,T-K} = F^{0.95}_{3,19} = 3.13$$

$\Rightarrow$ Lehne H_0 auf dem 5% Signifikanzniveau nicht ab. LNL2, LNK2 und LNLLNK üben gemeinsam keinen signifikanten Einfluss.

Interpretation: Man kann eine Cobb-Douglas Produktionsfunktion statt eine Translog-Produktionsfunktion schätzen.

6. Annahmen über die Fehlerterme

$$e \sim N(0, \sigma^2 I_T) \quad (\text{oder } e_t \sim N(0, \sigma^2) \text{ i.i.d.})$$

7. Falsch. Fehler 1. Art ist die Ablehnung der Nullhypothese, obwohl die Nullhypothese richtig ist.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

1. a) KQS für β ist effizient (BUE), falls $\rho = 0$, da dann $e \sim N(0, \sigma^2 I_T)$ und somit die Standardannahmen gelten.

   b) Durbin-Watson-Test: $\quad d = \dfrac{\sum_{t=2}^{30}(\hat{e}_t - \hat{e}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{30} \hat{e}_t^2}$

$$\sum_{t=1}^{30} \hat{e}_t^2 = \sum_{t=2}^{30} \hat{e}_{t-1}^2 + \hat{e}_{30}^2$$

$$\Rightarrow \quad d = 75.71/(27.74 + 0.1) = 2.719$$

Hypothese: $H_0 : \rho \geq 0 \quad vs. \quad H_1 : \rho < 0$

$$\left.\begin{aligned} \bar{d} = 4 - d = 1.281 \\ d_U^* = 1.489 \\ d_L^* = 1.352 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{d} < d_L \Rightarrow \text{Lehne } H_0 \text{ ab. Negative Autokorrelation angenommen.}$$

c) Es gibt 2 Möglichkeiten, ρ zu schätzen

i. $\hat{\rho} = 1 - \dfrac{1}{2}d = -0.366$ (mit DW-Statistik)

ii. $\hat{\rho} = \sum_{t=2}^{T} \hat{e}_t\hat{e}_{t-1} / \sum_{t=2}^{T} \hat{e}_{t-1}^2$

$$\begin{aligned}
\sum_{t=2}^{30} (\hat{e}_t - \hat{e}_{t-1})^2 &= \sum_{t=2}^{30} \hat{e}_t^2 - 2\sum_{t=2}^{30} \hat{e}_t\hat{e}_{t-1} + \sum_{t=2}^{30} \hat{e}_{t-1}^2 \\
&= \sum_{t=2}^{30} \hat{e}_{t-1}^2 - \hat{e}_1^2 + \hat{e}_{30}^2 - 2\sum_{t=2}^{30} \hat{e}_t\hat{e}_{t-1} + \sum_{t=2}^{30} \hat{e}_{t-1}^2 \\
&= 2\sum_{t=2}^{30} \hat{e}_{t-1}^2 - \hat{e}_1^2 + \hat{e}_{30}^2 - 2\sum_{t=2}^{30} \hat{e}_t\hat{e}_{t-1} \\
\sum_{t=2}^{30} \hat{e}_t\hat{e}_{t-1} &= \frac{2\sum_{t=2}^{30} \hat{e}_{t-1}^2 - \hat{e}_1^2 + \hat{e}_{30}^2 - \sum_{t=2}^{30} (\hat{e}_t - \hat{e}_{t-1})^2}{2} \\
&= (2 \times 27.74 - 0.2 + 0.1 - 75.71)/2 \\
&= -10.165 \\
\Rightarrow \hat{\rho} &= -10.165/27.74 = -0.366
\end{aligned}$$

Mit $\hat{\rho}$ kann $\hat{\Psi}$ bestimmt werden. Damit kann der FGLS-Schätzer $\hat{\hat{\beta}} = (X'\hat{\Psi}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Psi}^{-1}y$ bestimmt werden.

2. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e_t) &= \mathbb{E}(0.5\sqrt{x_{t2}}u_t) = 0.5\sqrt{x_{t2}}E(u_t) = 0 \\
\mathbb{E}(e_t^2) &= \mathbb{E}(0.25x_{t2}u_t^2) = 0.25x_{t2}\mathbb{E}(u_t^2) = 0.25x_{t2}\sigma^2 \\
\mathbb{E}(e_te_s) &= \mathbb{E}(0.5\sqrt{x_{t2}}u_t 0.5\sqrt{x_{s2}}u_s) = 0.25\sqrt{x_{t2}}\sqrt{x_{s2}}\mathbb{E}(u_tu_s) = 0 \quad (t \neq s)
\end{aligned}$$

a)

$$\mathbb{E}(ee') = \sigma^2 \underbrace{\frac{1}{4}\begin{bmatrix} x_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{T2} \end{bmatrix}}_{=\Psi}, \qquad e \sim N(0, \mathbb{E}(ee'))$$

b) GLS-Schätzer, dieser ist BUE (bester der unverzerrten Schätzer), da $e \sim N(0, \mathbb{E}(ee'))$

c) $P = 2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{x_{12}}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{x_{22}}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{x_{T2}}} \end{bmatrix}$

3. (a)

$$H_0 : \sigma_I^2 \leq \sigma_{II}^2 \quad vs. \quad H_1 : \sigma_I^2 > \sigma_{II}^2$$

Allgemein gilt:

$$\lambda = \frac{\hat{\sigma}_I^2}{\hat{\sigma}_{II}^2} \underset{H_0}{\sim} F_{45-5,45-5} = F_{40,40}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{0.462^2}{0.370^2} = 1.559$$

Entscheidung:

$$\lambda = 1.559 < F_{40,40}^{1-\alpha} = F_{40,40}^{0.95} = 1.69$$

$\Rightarrow$ Verwerfe H_0 nicht, Varianzen nicht unterschiedlich.

(b) KQ–Methode (da Fehler homoskedastisch), sonst FGLS