Lösung Klausur 2006 / 2. Termin

Aufgabe 1 (25 Punkte)

1. Online-Druckerei:

   (a)

$$X'X = \begin{bmatrix} 50 & 30 \\ 30 & 82 \end{bmatrix}, \quad (X'X)^{-1} = \frac{1}{3200} \begin{bmatrix} 82 & -30 \\ -30 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.025625 & -0.009375 \\ -0.009375 & 0.015625 \end{bmatrix}$$

$$X'y = \begin{bmatrix} 400 \\ 160 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8.75 \\ -1.25 \end{bmatrix}, \quad b'X'y = 3300$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{y'y - b'X'y}{T-K} = 2.0833, \quad R^2 = \frac{b'X'y - T\bar{y}^2}{y'y - T\bar{y}^2} = 0.5$$

   50 % der Varianz des Absatzes werden durch das Regressionsmodell erklärt.

   (b) $e \sim N(0, \sigma^2 I_T)$

   (c) b_1 ist maximaler Absatz der vom linearen Modell impliziert wird, falls der Preis 0 wäre. b_2 is die Preis-Semielastizität des Absatzes. Wenn der Preis um ein Cent steigt, sinkt der Absatz um 1.25%.

   (d) Der Preis für 10 Fotos steigt um 10 Cent. Unter Verwendung der Semielastizität: Absatz sinkt um 12.5%.

   (e)

$$\hat{\Sigma}_b = 2.0833 \begin{bmatrix} 0.025625 & -0.009375 \\ -0.009375 & 0.015625 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma}^2_{b_2} = 0.032552$$

2. Cobb-Douglas:

   (a)

$$\frac{Q_t}{L_t} = \alpha \left(\frac{K_t}{L_t} \right)^{\beta} e^{\epsilon_t}$$

   Das Modell kann in dieser Form nicht mit der einfachen KQ-Methode geschätzt werden, da es nicht linear in den zu schätzenden Parametern ist.

   (b)

$$\log \frac{Q_t}{L_t} = \log \alpha + \beta \log \frac{K_t}{L_t} + \epsilon_t$$
$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \epsilon_t$$

   (c) abhängige Variable:

$$y = \log \frac{Q}{L}$$

   Regressormatrix:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \log \frac{K_t}{L_t} \end{bmatrix}_{t=1,\dots,T}$$

$$\alpha = e^{\beta_1}, \quad \beta = \beta_2, \quad \gamma = 1 - \beta_2$$

Aufgabe 2

1. – $C, X2, X4, X5$
   – Eine Variable x_k wird als *signifikant* bezeichnet, wenn der zweiseitige Test die Nullhypothese $H_0 : \beta_k = 0$ auf einem vorgegebenen Signifikanzniveau verwirft.

2. $\alpha = 0.2336$

3. – $KI(\beta_4; 0.95) = [\underbrace{\tilde{\beta}_4}_{=-2.744} \pm \underbrace{\underbrace{t^{0.975}_{(126-6)}}_{=1.980} \underbrace{\hat{\sigma}\sqrt{(X'X)^{-1}_{4,4}}}_{\approx 0.1}}_{=0.198}] = [-2.942; -2.546]$

   – Testentscheidung: $\beta_4^0 = -2.7 \in KI(\beta_4; 0.95) \quad \Longrightarrow \quad H_0$ nicht ablehnen!

4. Test: $\quad H_0 : \beta_2 = \ldots = \beta_6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_0 : R\beta = r \qquad$ mit

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teststatistik:

$$\lambda = \frac{(R\tilde{\beta} - r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\tilde{\beta} - r)}{J\hat{\sigma}^2} \underset{H_0}{\sim} F_{(J,T-K)} = F_{(5,120)}$$

Da der p–Wert für die F–Statistik laut EViews < 0.05, wird H_0 verworfen. Alle Variablen sind also gemeinsam signifikant.

5. Test: $\quad H_0 : R\beta = r \quad (\alpha = 0.05) \quad$ mit $\quad R = [0\ 4\ 0\ 0\ -1\ 0]$ und $r = 0$

Teststatistik wie in 4., aber: R, r anders (s.o.) und $J = \text{Rang}(R) = 1 \quad \Rightarrow$

$$R\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}R' = [0\ 4\ 0\ 0\ -1\ 0] \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0.082 & \cdot & \cdot & -0.00214 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -0.00214 & \cdot & \cdot & 0.039 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.333$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = (R\tilde{\beta})'[R\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\tilde{\beta}) = \frac{(4\tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_5)^2}{[R\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}R']}$$
$$= \frac{(4 \cdot 0.616 - 3.959)^2}{1.333} = \frac{(-1.495)^2}{1.333} = 1.677$$

Kritischer Wert: $F^{0.95}_{(1,120)} = 3.92$
$\Rightarrow$ Testentscheidung: H_0 nicht verwerfen (da $\lambda = 1.667 < F^{0.95}_{(1,120)} = 3.92$)!

Anmerkung: Wegen $J = 1$ könnte man auch einen (äquivalenten) t-Test benutzen!

6. – Da σ^2 unbekannt ist, sind die t–Statistiken nicht normal–, sondern t–verteilt.
   – Die Teststatistik für den Test auf gemeinsame Signifikanz mehrerer Koeffizienten ist <u>nur</u> unter der Normalverteilungsannahme der Fehler F–verteilt.
   – Außerdem sind die Freiheitsgrade der F–Statistik J und $T - K$ und nicht $T - K$ und J.

7. $\mathrm{Var}(e_t) = \sigma^2$
   $\mathrm{Var}(y_t) = \mathrm{Var}(x'_{(t)}\beta + e_t) = \mathrm{Var}(e_t) = \sigma^2$
   $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) = \sigma^2 (X'X)^{-1}_{22}$

   Die Schätzung von β_2 wird unsicherer, je größer die Fehlervariabilität ($\sigma^2 \uparrow \Longrightarrow \mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) \uparrow$).

8. Die Varianz des Schätzers $\hat{\beta}_2$ ist $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) = \sigma^2 (X'X)^{-1}_{22}$, also nicht zufällig. Jedoch ist der Schätzer der Varianz von $\hat{\beta}_2$, gegeben durch $\widehat{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)} = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}_{22}$, zufällig.

Aufgabe 3

1.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^*] &= \mathbb{E}[Pe] = P\mathbb{E}[e] = 0\\ \mathrm{Cov}(e^*) &= \mathbb{E}[e^*e^{*'}] = \mathbb{E}[Pee'P'] = P\underbrace{\mathbb{E}[ee']}_{=\sigma^2\psi}P' = \sigma^2\underbrace{P\psi P'}_{=I_T} = \sigma^2 I_T,\end{aligned}$$

denn nach Voraussetzung gilt $\mathbb{E}(ee') = \sigma^2\Psi$ und $P'P = \Psi^{-1}$

$$\Rightarrow \quad (P'P)^{-1} = \psi \quad \Rightarrow \quad P^{-1}P'^{-1} = \psi \quad \Rightarrow \quad I_T = P\psi P'$$

2. (a) Hypothese ($\sigma_I^2, \sigma_{II}^2$ bezeichnen die Fehlervarianzen der armen bzw. reichen Staaten):

$$H_0 : \sigma_I^2 = \sigma_{II}^2 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_{II}^2 > \sigma_I^2,$$

Teststatistik: $\lambda = \frac{\widehat{\sigma}_{II}^2}{\widehat{\sigma}_I^2} \underset{H_0}{\sim} F_{(17-2,18-2)}$

$$\lambda = \frac{(76.00106)^2}{(47.23476)^2} = \frac{5776.161}{2231.122} = 2.59$$

$\Rightarrow$ Lehne H_0 auf 5% Signifikanzniveau ab (es liegt Heteroskedastizität vor), da $2.58 > F_{15,16}^{0.95} = 2.35$.

(b)

$$\mathrm{Cov}(e) = \mathbb{E}(ee') = \begin{bmatrix}\sigma_I^2 \cdot I_{18} & \mathbf{0}_{(18\times17)}\\ \mathbf{0}_{(17\times18)} & \sigma_{II}^2 \cdot I_{17}\end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathrm{Cov}(e)} = \begin{bmatrix}2231.122 \cdot I_{18} & \mathbf{0}_{(18\times17)}\\ \mathbf{0}_{(17\times18)} & 5776.161 \cdot I_{17}\end{bmatrix}$$

(c) FGLS Methode (Modell mit zwei Gruppenvarianzen $\sigma_I^2, \sigma_{II}^2$), d.h. ersetze in Formel für GLS-Schätzer $\sigma_I^2, \sigma_{II}^2$ durch ihre Schätzungen:

$$\widehat{\widehat{\beta}} = \left(\frac{X_I'X_I}{\widehat{\sigma}_I^2} + \frac{X_{II}'X_{II}}{\widehat{\sigma}_{II}^2}\right)^{-1}\left(\frac{X_I'y_I}{\widehat{\sigma}_I^2} + \frac{X_{II}'y_{II}}{\widehat{\sigma}_{II}^2}\right)$$

3. (a)

$$\widehat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^T \widehat{e}_t\widehat{e}_{t-1}}{\sum_{t=2}^T \widehat{e}_{t-1}^2} = \frac{\sum_{t=2}^T \widehat{e}_t\widehat{e}_{t-1}}{\sum_{t=1}^T \widehat{e}_t^2 - \widehat{e}_T^2} = \frac{0.12}{0.7 - 0.045} = 0.18$$

(b) Hypothese: $H_0 : \rho = 0 \quad vs. \quad H_1 : \rho > 0$

$$\begin{aligned} d &= \frac{\sum_{t=2}^T (\widehat{e}_t - \widehat{e}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T \widehat{e}_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^T \widehat{e}_t^2 - 2\sum_{t=2}^T \widehat{e}_t\widehat{e}_{t-1} + \sum_{t=2}^T \widehat{e}_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^T \widehat{e}_t^2}\\ &= \frac{(0.7 - 0.018) - (2 * 0.12) + (0.7 - 0.045)}{0.7} = \frac{1.097}{0.7} = 1.567\end{aligned}$$

Kritische Werte ($T = 25, K = 3, \alpha = 0.05$): $d_L^* = 1.206, \quad d_U^* = 1.550$

$\Rightarrow$ Lehne H_0 auf 5% Signifikanzniveau nicht ab (es liegt keine positive AK vor), da $d = 1.567 > 1.550 = d_U^*$.

(c) KQ-Methode, weil keine Autokorrelation vorliegt. (Sonst müssten wir mit der FGLS-Methode die Modellkoeffizienten schätzen.)

4. Unter der Annahne $e \sim (0, \Phi)$ ist der KQ-Schätzer zwar unverzerrt, aber nicht immer effizient. (Effizienz liegt vor, wenn $\Phi = \sigma^2 I_T$ gilt.)