Aufgabe 1 (25 Punkte)

Betrachten Sie das Zwei-Gleichungsmodell

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1\beta_1 + e_1 \\ y_2 &= x_2\beta_2 + e_2, \end{aligned}$$

mit $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \sim (0, \Sigma \otimes I_T)$, wobei y_i und x_i $(i = 1, 2)$ jeweils endogene beziehungsweise exogene Variablen beschreiben.

a) Wie würden Sie ein solches System schätzen? Hängt Ihre Entscheidung davon ab, ob die Varianz-Kovarianzmatrix Σ bekannt oder unbekannt ist? Erläutern Sie Ihre Antworten.

b) Schätzen Sie β_1 and β_2 mit Hilfe des OLS- und des SUR-Schätzers. Die folgenden Daten sind verfügbar:

$$X'X = \begin{bmatrix} x_1'x_1 & x_1'x_2 \\ x_2'x_1 & x_2'x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \; X'Y = \begin{bmatrix} x_1'y_1 & x_1'y_2 \\ x_2'y_1 & x_2'y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}, \; \hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

c) Angenommen, es liegen keine getrennten Beobachtungen für x_1 und x_2 vor, sondern nur Beobachtungen für die Durchschnitte von x_1 und x_2 in jeder Periode: $\bar{x}_t = 0.5(x_{1t} + x_{2t})$ für $t = 1, \ldots, T$. Das Modell wird geschätzt unter Verwendung von

$$x_1 = \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_T \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_2 = \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_T \end{pmatrix}.$$

Wie lauten die Schätzungen für solch ein Modell?

Aufgabe 2 (18 Punkte)

Zwischen den Variablen y_t^* und z_t^* bestehe folgender Zusammenhang:

$$y_t^* = z_t^*\beta.$$

Beobachtet werden jedoch nur die Variablen y_t und z_t. Ihre Beziehung zu den nicht beobachtbaren Variablen y_t^* and z_t^* wird durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} y_t &= y_t^* + v_t \\ z_t &= z_t^* + u_t. \end{aligned}$$

Dabei werden die folgendenen Annahmen bezüglich der Störgrößen v_t and u_t getroffen:

$$\begin{aligned} &E(v_t) = 0, \; E(v_t^2) = \sigma_v^2 \text{ und } E(v_t v_s) = 0 \text{ für } t \neq s, \\ &E(u_t) = 0, \; E(u_t^2) = \sigma_u^2 \text{ und } E(u_t u_s) = 0 \text{ für } t \neq s, \\ &E(u_t v_t) = \gamma \; \forall \, t \quad \text{und} \quad E(u_t v_s) = 0 \text{ für } t \neq s, \\ &E(v_t z_s^*) = E(u_t z_s^*) = 0 \quad \forall \, t, s. \end{aligned}$$

a) Leiten Sie für die Störgröße e_t im Modell $y_t = z_t\beta + e_t$ einen Ausdruck in Abhängigkeit von u_t und v_t her.

b) Berechnen Sie $E(e_t z_t)$ und diskutieren Sie die Konsequenzen Ihres Ergebnisses auf die Eigenschaften des OLS-Schätzers in dem Modell $y_t = z_t\beta + e_t$.

c) Nehmen Sie an, daß $E[z_t^* z_{t-1}^*] = a \neq 0$ und zeigen Sie, daß z_{t-1} eine geeignete Instrumentalvariable für eine konsistente Schätzung von β ist, d.h. z_{t-1} erfüllt die Bedingungen für eine konsistente IV-Schätzung unter den gegebenen Modellannahmen.

Aufgabe 3 (22 Punkte)

Für die Beziehung zwischen y_t und x_t wird das folgende nichtlineare Modell spezifiziert:

$$y_t = (2 + x_t)^\beta + e_t.$$

a) Schreiben Sie das "Lineare Pseudomodell" auf. (Hinweis: $\frac{\partial a^k}{\partial k} = \ln(a)a^k$.) Beschreiben Sie, wie ein Gauss-Newton-Algorithmus mit Hilfe des Linearen Pseudomodells konstruiert werden kann.

b) Bestimmen Sie die Rekursionsformel des Gauss-Newton-Algorithmus für obiges Modell und geben Sie an, weshalb die Bedingung erster Ordnung für ein Minimum der Residuenquadratsumme erfüllt ist, d.h. $\sum z_t(\beta)[y_t - f(x_t, \beta)] = 0$, wenn der Gauss-Newton Algorithmus konvergiert: $\beta_{n+1} = \beta_n$.

c) Beschreiben Sie die Unterschiede zwischen dem Newton-Raphson- und dem Gauss-Newton-Algorithmus.

d) Erklären Sie kurz die Unterschiede und die Beziehung zwischen der Nichtlinearen Kleinsten-Quadrate-Schätzung and der Nichtlinearen Maximum-Likelihood-Schätzung.

Aufgabe 4 (35 Punkte)

Betrachten Sie das folgende interdependente Modell bei dem y_i endogene und x_i exogene Variablen beschreiben ($i = 1, 2, 3$):

$$
\begin{aligned}
y_{t1} &= \gamma_{21} y_{t2} + \gamma_{31} y_{t3} + \beta_{21} x_{t2} + e_{t1} && (1)\\
y_{t2} &= \gamma_{12} y_{t1} + \beta_{12} x_{t1} + e_{t2} && (2)\\
y_{t3} &= \gamma_{23} y_{t2} + e_{t3}, && (3)
\end{aligned}
$$

mit $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \sim (0, \Sigma \otimes I_T)$. Die folgenden Stichprobenmomente sind gegeben:

$$X'X = \begin{bmatrix} x_1'x_1 & x_1'x_2 \\ x_2'x_1 & x_2'x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad X'Y = \begin{bmatrix} x_1'y_1 & x_1'y_2 & x_1'y_3 \\ x_2'y_1 & x_2'y_2 & x_2'y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Y'Y = \begin{bmatrix} y_1'y_1 & y_1'y_2 & y_1'y_3 \\ y_2'y_1 & y_2'y_2 & y_2'y_3 \\ y_3'y_1 & y_3'y_2 & y_3'y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Schreiben Sie das Modell in der Form $Y\Gamma + XB + \mathbf{E} = 0$ auf.

b) Schätzen Sie die Parameter der Reduzierten Form und erläutern Sie das Identifikationsproblem.

c) Überprüfen Sie die Identifikation der Parameter in den Gleichungen (1) und (3) unter Verwendung des Abzählkriteriums und in Gleichung (2) mit Hilfe des Rangkriteriums.

d) Welches Schätzverfahren würden Sie anwenden, um die strukturellen Parameter der Gleichung (2) zu schätzen. Und wie würden Sie Gleichung (3) schätzen? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

e) Schätzen Sie Gleichung (3) mit Hilfe des Schätzverfahrens, das Sie in d) für diese Gleichung vorgeschlagen haben.

f) Was ist die allgemeine Motivation für die Anwendung des 3SLS Schätzers? Benennen Sie die Nachteile des 3SLS Schätzers. Würden Sie die Anwendung des 3SLS Schätzers für das in dieser Aufgabe betrachtete System empfehlen?