**Aufgabe 1 (15 Punkte)**

Betrachten Sie das folgende Dummyvariablen Modell

$$y_t = \beta_1 + x_t\beta_2 + x_tS_t\delta_1 + x_tE_t\delta_2 + x_tS_tE_t\delta_3 + u_t, \tag{1}$$

wobei $u = (u_1 \dots u_t \dots u_T)' \sim (0, \sigma^2 I_T)$. Die Variable $y_t$ misst die Ausgaben von Person $t$ für Bier. Es wird angenommen, dass die Ausgaben von einigen quantitativen Faktoren abhängen, die in $x_t$ zusammengefasst sind. Des weiteren hängen die Ausgaben von dem Geschlecht und dem Ausbildungsniveau der Person $t$ ab, welche mit Hilfe der Dummyvariablen $S_t$ and $E_t$ erfasst werden. Die Dummyvariablen sind wie folgt definiert:

$$S_t = \begin{cases} 1 & \text{falls Person } t \text{ eine Frau ist} \\ 0 & \text{falls Person } t \text{ ein Mann ist} \end{cases} \quad \text{und} \quad E_t = \begin{cases} 1 & \text{falls Person } t \text{ einen Hochschulabschluss hat} \\ 0 & \text{falls Person } t \text{ keinen Hochschulabschluss hat} \end{cases}$$

a) Interpretieren Sie kurz das Modell (1) hinsichtlich der Verwendung von zwei Dummyvariablen. Beziehen Sie den Interaktionsterm $S_tE_t$ in Ihre Interpretation mit ein.

b) Schreiben Sie das Modell (1) mit Hilfe der Matrixschreibweise auf. Definieren Sie hierzu geeignete Matrizen.

c) Das Modell (1) ist in der sogenannten "dummy variable representation" dargestellt. Schreiben Sie die sogenannte "sets of equation" Darstellung auf und geben Sie die Beziehung zwischen den Parametern dieser Darstellung und den Parametern der "dummy variable representation" in (1) an.

**Aufgabe 2 (22 Punkte)**

Ein Marketing-Institut möchte den Einfluss von Werbeausgaben auf den Umsatz von zwei verschiedenen Firmen schätzen, die im gleichen Markt aktiv sind. Das Institut betrachtet folgendes Zwei-Gleichungsmodell

$$y_1 = x_1\beta_1 + e_1 \tag{2}$$
$$y_2 = x_2\beta_2 + e_2, \tag{3}$$

wobei $y_i$ und $x_i$ $(i = 1, 2)$ jeweils den Logarithmus des Umsatzes und den Logarithmus der Werbeausgaben von Firma $i$ beschreiben. Alle Variablen sind mittelwertbereinigt. Des weiteren wird angenommen, dass $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \sim (0, \Sigma \otimes I_T)$. Die folgenden Daten stehen zur Verfügung:

$$X'X = \begin{bmatrix} x_1'x_1 & x_1'x_2 \\ x_2'x_1 & x_2'x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 20 \end{bmatrix}, \quad X'Y = \begin{bmatrix} x_1'y_1 & x_1'y_2 \\ x_2'y_1 & x_2'y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Schätzen Sie $\beta_1$ und $\beta_2$ mittels des OLS- und des SUR-Schätzers.

b) Vergleichen und interpretieren Sie die Schätzergebnisse in a). Welche Schätzergebnisse sind zuverlässiger? Erklären Sie kurz Ihre Antwort.

c) In dieser Aufgabe kennen wir die Varianz-Kovarianz Matrix $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$. Bei vielen Anwendungen ist $\Sigma$ jedoch unbekannt. In diesem Fall muss $\Sigma$ geschätzt werden, um eine SUR-Schätzung zu ermöglichen. Im allgemeinen werden die Varianzen und Kovarinanzen ($\sigma_{ij}$'s) wie folgt geschätzt

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T}\hat{e}_i'\hat{e}_j. \tag{4}$$

Hierbei sind $\hat{e}_i = y_i - x_i b_i$ die Residuen einer Kleinste-Quadrate-Schätzung von Gleichung $i$ ($b_i = (x_i'x_i)^{-1}X_i'y_i$). Zeigen Sie, dass $\hat{\sigma}_{ij}$ ein konsistenter Schätzer für $\sigma_{ij}$ ist, d.h. Sie müssen überprüfen, ob $\text{plim}(\hat{\sigma}_{ij}) = \sigma_{ij}$ gilt. Verwenden Sie dabei die folgenden Annahmen:

$$\text{plim}\,\frac{e_i'e_j}{T} = \sigma_{ij}^2, \quad \text{plim}\,\frac{x_i'e_j}{T} = 0, \quad \text{plim}\,\frac{x_i'x_j}{T} = \lim\frac{x_i'x_j}{T} = Q_{ij}, \quad \text{for } i = j \text{ und } i \neq j,$$

wobei $Q_{ij}$ eine feste, nichtsinguläre Matrix ist. (Hinweis: Der Ausdruck $\hat{e}_i = (I_T - x_i(x_i'x_i)^{-1}x_i')e_i$ könnte hilfreich sein.)

**Aufgabe 3 (22 Punkte)**

Für die Beziehung zwischen $y_t$ und $x_t$ wird folgendes nichtlineares Modell spezifiziert:

$$y_t = f(x_t, \beta) + u_t, \tag{5}$$

wobei $y_t$, $x_t$ und $\beta$ Skalare sind.

a) Beschreiben Sie, wie ein Newton-Raphson-Algorithmus für eine Nichtlineare Kleinste-Quadrate-Schätzung von Modell (5) konstruiert werden kann.

b) In einem weiteren Schritt wird Modell (5) konkreter spezifiziert:

$$y_t = (x_t + \beta)^2 + u_t. \tag{6}$$

Bestimmen Sie die Rekursionsformel des Gauss-Newton-Algorithmus für das Modell (6).

c) Führt der Gauss-Newton-Algorithmus immer zu einem Minimum der Residuenquadratsumme? Erläutern Sie Ihre Antwort.

d) Der Newton-Raphson-Algorithmus verwendet die zweite Ableitung $h(\beta) = \dfrac{d^2S(\beta)}{d\beta^2}$, wohingegen der Gauss-Newton-Algorithmus den Erwartungswert dieser Ableitung verwendet. Bestätigen Sie diese Aussage indem Sie für das Modell (6) zeigen :

$$E\left[\frac{d^2(\sum_{t=1}^T[y_t - f(x_t,\beta)]^2)}{d\beta^2}\right] = 2\sum_{t=1}^T \left(\frac{df(x_t,\beta)}{d\beta}\right)^2,$$

wobei der erste Ausdruck gleich $E\left[\frac{d^2S(\beta)}{d\beta^2}\right]$ und der letzte gleich $2\sum_{t=1}^T z_t(\beta)^2 = 2z(\beta)'z(\beta)$ ist.

**Aufgabe 4 (17 Punkte)**

Für Quartalsdaten wurde vorgeschlagen, dass autorgressive Prozesse höherer Ordnung besser geeignet sind als autorgressive Prozesse erster Ordnung, um Autokorrelation in den Fehlertermen zu modellieren. Insbesondere wurde das folgende verallgemeinerte lineare Modell empfohlen:

$$\begin{aligned} & y_t = x_t\beta + e_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T \quad \text{with} \\ & e_t = \rho e_{t-4} + u_t, \quad \text{where} \quad |\rho| < 1 \quad \text{and} \quad u = (u_1 \ldots u_t \ldots u_T)' \sim (0, \sigma_u^2 I_T). \end{aligned} \tag{7}$$

Folglich ist der Fehlerterm in Periode $t$ mit dem Fehlerterm der vorherigen Saison $(t-4)$ verbunden und NICHT mit dem Fehlerterm der vorangehenden Periode $(t-1)$. Wie im Fall von Modellen mit autoregressiven Fehlertermen erster Ordnung können wir das Modell (7) mit Hilfe des Verallgemeinerten Kleinste-Quadrate-Schätzers (GLS) schätzen. Um eine solche Schätzung zu ermöglichen, müssen wir die Kovarianzmatrix des Fehlertermvektors $e = (e_1 \ldots e_t \ldots e_T)'$ bestimmen. In den folgenden Aufgaben werden Sie die einzelnen Bestandteile der Varianz-Kovarianzmatrix von $e$ ermitteln. Dies geschieht unter der Annahme, dass der Fehlertermprozess stationär ist ($|\rho| < 1$).

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $e_t$.

b) Zeigen Sie, dass die Kovarianz von $e_t$ und $e_{t-4}$ ($Cov(e_t e_{t-4})$) gleich $\sigma_u^2 \frac{\rho}{1-\rho^2}$ ist, d.h. zeigen Sie $E[e_t e_{t-4}] = \sigma_u^2 \frac{\rho}{1-\rho^2}$.

c) Die Ergebnisse aus a) und b) können zu

$$Cov(e_t e_{t-s}) = E[e_t e_{t-s}] = \sigma_u^2 \frac{\rho^{s/4}}{1-\rho^2} \quad \text{for} \quad s = 0, 4, 8, 12, \ldots. \tag{8}$$

verallgemeinert werden. Für $s = 0$ und $s = 4$ haben Sie die Ergebnisse bereits in a) and b) abgeleitet. Erklären Sie, weshalb es dann ausreicht

$$E[e_t e_{t-s-4}] = \rho E[e_t e_{t-s}] \quad \text{for} \quad s = 0, 4, 8, 12, \ldots \tag{9}$$

zu zeigen, um (8) zu beweisen. Überprüfen Sie, ob $E[e_t e_{t-s-4}] = \rho E[e_t e_{t-s}]$ für das Modell (7) gilt.

d) Schließlich, geben Sie die Varianz-Kovarianzmatrix ($E[ee']$) von $e$ an. Berücksichtigen Sie dabei die Tatsache, dass $E[e_t e_{t-k}] = 0$ für $k \neq 0, 4, 8, 12, \ldots$ gilt. Um die Darstellungen zu vereinfachen, nehmen Sie an das 9 Beobachtungen vorliegen ($T = 9$).

**Aufgabe 5 (24 Punkte)**

Betrachten Sie das folgende makroökonomische Modell:

$$\begin{aligned} C_t &= \alpha_1 + \alpha_2 Y_t + e_{1t} && (10)\\ I_t &= \beta_1 + \beta_2 (Y_t - Y_{t-1}) + e_{2t} && (11)\\ G_t &= \delta_1 + \delta_2 Y_{t-1} + \delta_3 W_t + e_{3t} && (12)\\ Y_t &= C_t + I_t + G_t && (13) \end{aligned}$$

mit den endogenen Variablen:
$C_t$ Konsum in Periode $t$,
$I_t$ Investitionen in Periode $t$,
$G_t$ Staatsausgaben in Periode $t$,
$Y_t$ Bruttoinlandsprodukt in Periode $t$.
Die exogene Variable $W_t$ misst die Anzahl der Perioden bis zu den nächsten Wahlen. Des weiteren nehmen wir an, dass $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \sim (0, \Sigma \otimes I_T)$.

a) Geben Sie den Gleichungstyp für (10) bis (13) an.

b) Schreiben Sie das Modell in der strukturellen Form $Y\Gamma + XB + \mathbf{E} = 0$ für die endogenen Variablen $C_t$, $I_t$, und $Y_t$ auf.

c) Überprüfen Sie mit Hilfe des Rangkriteriums die Identifikation der Parameter in allen drei strukturellen Gleichungen.

d) Welches Schätzverfahren würden Sie anwenden, um die Parameter der strukturellen Gleichung für $Y_t$ zu schätzen, d.h. der Gleichung, die sich in b) für $Y_t$ ergeben hat? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

e) Schätzen Sie die Parameter der strukturellen Gleichung für $Y_t$. Sie haben die folgenden Informationen gegeben:

$$\hat{\Pi} = \begin{bmatrix} \hat{\pi}_{11} & \hat{\pi}_{12} & \hat{\pi}_{13} \\ \hat{\pi}_{21} & \hat{\pi}_{22} & \hat{\pi}_{23} \\ \hat{\pi}_{31} & \hat{\pi}_{32} & \hat{\pi}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

wobei die erste, zweite und dritte Spalte von $\hat{\Pi}$ jeweils die Parameter der reduzierten Form für die Gleichungen von $C_t$, $I_t$ und $Y_t$ beinhalten.