Aufgabe 1 (25 Punkte)

Bei dem linearen Trendmodell:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 t + e_t, \quad t = 1, 2, \ldots, 10$$

wird davon ausgegangen, daß ein Strukturbruch in den Koeffizienten in der 6. Periode stattgefunden hat. Die Varianz der Störgrößen wird dagegen für den gesamten Zeitraum als konstant vorausgesetzt. ($e_t \sim (0, \sigma^2)$). Die foldenden Daten sind verfügabr:

$$\sum_{t=1}^{5} y_t = 2, \ \sum_{t=1}^{5} y_t t = 7, \ \sum_{t=6}^{10} y_t = 5, \ \sum_{t=6}^{10} y_t t = 40.$$

a) Stellen Sie das Modell für die Hypothese, daß der Strukturbruch in beiden Koeffizienten β_1 und β_2 stattgefunden hat, mit Hilfe einer geeignet definierten Dummyvariable dar. Verwenden Sie auch die Matrixschreibweise.

b) Schätzen Sie β_1 und β_2 unter der Annahme, daß sich beide Koeffizienten verändert haben. Begründen Sie Ihre Wahl des Schätzverfahrens.

c) Schreiben Sie die "sets-of-equation"-Darstellung für das Model auf unter der Annahme, daß sich beide Koeffizienten verändert haben. Geben Sie die Beziehung der Parameter dieser Darstellung zu den Parametern in a) an.

d) Eine Schätzung für die Periode vor dem Strukturbruch ($t = 1, \ldots, 5$) ergab eine Residuenquadratsumme $SSE_1 = 0.2$, während eine Residuenquadratsumme von $SSE_2 = 0.3$ für die zweite Periode ($t = 6, \ldots, 10$) ermittelt wurde. Die OLS-Schätzung des Modells für den gesamten Schätzzeitraum ohne Berücksichtigung des Strukturbruchs ergab $SSE_T = 2$. Überprüfen Sie die Hypothese, daß die Koeffzienten für den gesamten Schätzzeitraum konstant sind. Verwenden Sie ein Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ and nehmen Sie an, daß $e_t \sim N(0, \sigma^2)$. (Geben Sie die Nullhypothese bezüglich Ihrer Modellspezifikation in a) an.)

Aufgabe 2 (21 Punkte)

Gegeben sei folgendes lineares Regressionsmodell

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + e_t, \quad e_t = x_t u_t, \quad u = (u_1 \ldots u_t \ldots u_T)' \sim (0, \sigma^2 I_T), \tag{1}$$

wobei x_t ein nicht stochastischer Regressor ist.

a) Wie lautet die Varianz-Kovarianzmatrix des Residuenvektors $e = (e_1 \ldots e_t \ldots e_T)'$?

b) Finden Sie eine geeignete Matrix P, so daß gilt $e^* = Pe \sim (0, \sigma^2 I)$.

c) Berechnen Sie den GLS Schätzer $\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix}$ für β_1 und β_2 mit Hilfe der folgenden Daten:

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{1}{x_t^2} = 2, \ \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{x_t} = 4, \ \sum_{t=1}^{T} \frac{y_t}{x_t^2} = 1.2, \ \sum_{t=1}^{T} \frac{y_t}{x_t} = 3.1,$$

wobei $T = 10$ die Anzahl der Beobachtungen ist.

d) Unter der Annahme, daß ein Test gezeigt hat, daß β_1 nicht signifikant verschieden von Null ist, wurde Modell (1) zu $y_t = \beta x_t + e_t$ reduziert, wobei e_t wie in (1) definiert ist. Zeigen sie für diesen Fall, daß

$$\frac{var(\hat{\beta})}{var(b)} = \frac{(\Sigma_{t=1}^{T} x_t^2)^2}{T \Sigma_{t=1}^{T} x_t^4},$$

wobei $var(\hat{\beta})$ die Varianz des GLS Schätzers und $var(b)$ die Varianz des OLS Schätzers für β ist. Welchen Wertebereich nimmt der Koeffizient $var(\hat{\beta})/var(b)$ an. Geben Sie eine ökonometrische Begründung.

Aufgabe 3 (22 Punkte)

Für die Beziehung zwischen y_t und x_t wird folgendes nichtlineares Modell spezifiziert:

$$y_t = \beta^{x_t - 1} + e_t.$$

a) Beschreiben Sie, wie ein Newton-Raphson-Algorithmus für eine Nichtlineare Kleinste-Quadrate-Schätzung konstruiert werden kann. Bestimmen Sie die Rekursionsformel des Newton-Raphson-Algorithmus für obiges Modell.

b) Der Newton-Raphson-Algorithmus verwendet die zweite Ableitung $h(\beta) = \dfrac{d^2 S(\beta)}{d\beta^2}$, wohingegen der Gauss-Newton-Algorithmus den Erwartungswert dieser Ableitung verwendet. Bestätigen Sie diese Aussage indem Sie für das obige Modell zeigen:

$$E\left[\frac{d^2(\sum_{t=1}^T [y_t - f(x_t,\beta)]^2)}{d\beta^2}\right] = 2\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{df(x_t,\beta)}{d\beta}\right)^2,$$

wobei der erste Ausdruck gleich $E\left[\frac{d^2 S(\beta)}{d\beta^2}\right]$ und der letzte gleich $2\sum_{t=1}^T z_t(\beta)^2 = 2z(\beta)'z(\beta)$ ist.

c) Erklären Sie kurz, warum der Newton-Raphson-Algorithmus zu einem Maximum anstatt zu einem Minimum der Residuenquadratsumme führen kann. Kennen Sie einen Algorithums für die Nichtlineare Kleinste-Quadrate-Schätzung, der nicht diese Eigenschaft hat. Geben Sie an, warum dieser Algorithmus zu einem Minimum führt.

Aufgabe 4 (32 Punkte)

Betrachten Sie das folgende interdependente Modell bei dem y_i endogene und x_i exogene Variablen beschreiben $(i = 1, 2)$:

$$y_{t1} = \gamma_{21} y_{t2} + \beta_{11} x_{t1} + \beta_{21} x_{t2} + e_{t1}, \qquad (1)$$
$$y_{t2} = \gamma_{12} y_{t1} + \beta_{22} x_{t2} + e_{t2},, \qquad (2)$$

mit $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \sim (0, \Sigma \otimes I_T)$. Die folgenden Stichprobenmomente sind gegeben:

$$X'X = \begin{bmatrix} x_1'x_1 & x_1'x_2 \\ x_2'x_1 & x_2'x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \; X'Y = \begin{bmatrix} x_1'y_1 & x_1'y_2 \\ x_2'y_1 & x_2'y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$Y'Y = \begin{bmatrix} y_1'y_1 & y_1'y_2 \\ y_2'y_1 & y_2'y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

a) Schreiben Sie das Modell in der Form $Y\Gamma + XB + \mathbf{E} = 0$ auf.

b) Leiten Sie die reduzierte Form von Gleichung (2) her. Wie würden Sie die Parameter der reduzierten Form schätzen? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Überprüfen Sie die Identifikation der Parameter in den Gleichungen (1) und (2) mit Hilfe des Rangkriteriums. Erklären Sie kurz die Unterschiede zwischen dem Rang- und dem Abzählkriterium.

d) Welches Schätzverfahren würden Sie anwenden, um die strukturellen Parameter der Gleichung (2) zu schätzen. Wie würden Sie Gleichung (1) schätzen? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

e) Schätzen Sie Gleichung (2) mit Hilfe des Schätzverfahrens, das Sie in d) vorgeschlagen haben.

f) Zeigen Sie, daß der 3SLS-Schätzer identisch ist mit dem ILS- Schätzer, wenn alle Gleichungen exakt identifiziert sind.