**Aufgabe 1 (15 Punkte)**

Betrachten Sie das folgende verallgemeinerte lineare Modell

$$y_t = \beta_1 + x_t\beta_2 + e_t, \quad e_t \sim \begin{cases} (0, \sigma_A^2) & \text{für} \quad t = 1, \ldots, 8 \\ (0, \sigma_B^2) & \text{für} \quad t = 9, \ldots, 20 \end{cases}, \quad E[e_t e_{t-s}] = 0 \ \ \forall\, s \neq 0. \qquad (1)$$

Es ist bekannt, dass $\sigma_A^2 = 2\sigma_B^2$ gilt und dass $x_t$ ein nicht-stochastischer Regressor ist. Weiterhin sind die folgenden Informationen gegeben:

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 20, \quad \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 40, \quad \sum_{i=1}^{8} y_i = 8, \quad \sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 12,$$
$$\sum_{i=9}^{20} x_i = 23, \quad \sum_{i=9}^{20} x_i^2 = 47, \quad \sum_{i=9}^{20} y_i = 12, \quad \sum_{i=9}^{20} x_i y_i = 17.$$

a) Geben Sie die Kovarianzmatrix des Fehlertermvektors $e = (e_1 \ldots e_t \ldots e_T)'$ an.

b) Zeigen Sie, dass der OLS Schätzer für $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ unverzerrt ist. Weshalb sollte man dennoch den GLS Schätzer verwenden?

c) Berechnen Sie den GLS Schätzer $\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix}$ für $\beta$.

**Aufgabe 2 (22 Punkte)**

Für die Beziehung zwischen $y_t$ und $x_t$ wird folgendes nichtlineares Modell spezifiziert:

$$y_t = f(x_t, \beta) + u_t, \qquad (2)$$

wobei $y_t$, $x_t$ und $\beta$ Skalare sind.

a) Beschreiben Sie, wie das "lineare Pseudomodel" für das allgemeine Model (2) hergeleitet werden kann. Erklären Sie, wie ein Gauss-Newton-Algorithmus mit Hilfe des "linearen Pseudomodells" konstruiert werden kann.

b) In einem weiteren Schritt wird Modell (2) konkreter spezifiziert:

$$y_t = e^{\beta x_t} + u_t. \qquad (3)$$

Bestimmen Sie die Rekursionsformel des Newton-Raphson-Algorithmus für das Modell(3).

c) Beschreiben Sie kurz die Unterschiede zwischen dem Newton-Raphson- und dem Gauss-Newton-Algorithmus.

d) Erklären Sie, weshalb es sinnvoll ist, verschiedene Startwerte sowohl für den Gauss-Newton als auch für den Newton-Raphson Algorithmus zu verwenden.

**Aufgabe 3 (16 Punkte)**

Es is das folgende lineare Modell mit stochastischen Regressoren und autokorrelierten Fehlertermen gegeben:

$$\begin{aligned} &y_t = y_{t-1}\beta + e_t, \quad t = 1, 2, \ldots \quad \text{mit} \quad e_t = \rho e_{t-1} + u_t, \quad |\rho| < 1 \\ &E[y_{t-r}u_t] = 0 \;\text{ für }\; r = 1, 2, \ldots \quad \text{und} \quad u = (u_1 \ldots u_t \ldots u_T)' \sim (0, \sigma_u^2 I_T) \end{aligned} \tag{4}$$

a) Zeigen Sie, dass der OLS Schätzer $b = \frac{\sum y_t y_{t-1}}{\sum y_{t-1}^2}$ ein inkonsistenter Schätzer für $\beta$ ist. Nehmen Sie an, dass $E[y_{t-1}^2] = E[y_t^2] = \sigma_y^2 \neq 0$ und $E[e_t y_{t-1}] = \sigma_{ey} \neq 0$ gilt.

b) Ist $y_{t-2}$ ein geeignetes Instrument für $y_{t-1}$? Falls ja, zeigen Sie, dass alle notwendigen Bedingungen für eine konsistente Instrumentalvariablenschätzung erfüllt sind. Falls nein, zeigen Sie, dass mindestens eine dieser Annahmen nicht erfüllt ist.

c) Erklären Sie, warum die asymptotische Varianz eines Instrumentalvariablen-Schätzers für $\beta$ entscheidend davon abhängt, wie gut $y_{t-1}$ durch die Instrumentalvariable erklärt wird. Diskutieren Sie die Grenzfälle vollständiger Korrelation und völliger linearer Unabhängigkeit zwischen $y_{t-1}$ und dem Instrument.

**Aufgabe 4 (34 Punkte)**

Betrachten Sie das folgende interdependente Model bei dem $y_i$ $(i = 1, 2, 3)$ endogene Variablen beschreiben und $x_1$ eine exogene Variable ist:

$$y_{t1} = \beta_{11} x_{t1} + e_{t1}, \tag{5}$$
$$y_{t2} = \gamma_{12} y_{t1} + \beta_{12} x_{t1} + e_{t2}, \tag{6}$$
$$y_{t3} = \gamma_{13} y_{t1} + \gamma_{23} y_{t2} + \beta_{13} x_{t1} + e_{t3}, \tag{7}$$

mit $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \sim (0, \Sigma \otimes I_T)$.

a) Schreiben Sie das Modell in der strukturellen Form $Y\Gamma + XB + \mathbf{E} = 0$ auf.

b) Überprüfen Sie die Identifikation der Parameter in den Gleichungen (5)-(7). Was schlussfolgern Sie hinsichtlich der Möglichkeit, die Parameter der strukturellen Form zu schätzen?

c) Betrachten Sie nun das einfachere bivariate System

$$y_{t1} = \beta_{11} x_{t1} + e_{t1}, \tag{8}$$
$$y_{t2} = \gamma_{12} y_{t1} + \beta_{12} x_{t1} + e_{t2}, \tag{9}$$

mit $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \sim (0, \Sigma \otimes I_T)$.

i) Schreiben Sie die strukturelle Form $Y\Gamma + XB + \mathbf{E} = 0$ für das Modell (8)-(9) auf. Wenn Sie die Identifiktion der Parameter beider Gleichungen überprüfen, werden Sie sehen, dass die Gleichung (8) exakt identifiziert und die Gleichung (9) nicht identifiziert ist. Wieviele Restriktionen bzw. weitere Informationen benötigen Sie, um die Parameter der Gleichung (9) exakt zu identifizieren?

ii) Stellen Sie die reduzierte Form $Y = X\Pi + V$ für das Modell (8)-(9) in Matrix-Schreibweise auf, indem Sie die Koeffizienten in $\Pi$ bezüglich der Parameter der strukturellen Form ausdrücken.

iii) Die Kovarianzmatrix der Fehlertermmatrix $V$ der reduzierten Form ist

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{bmatrix} = (\Gamma^{-1})' \Sigma \Gamma^{-1}.$$

Formen Sie diese Gleichung um, so dass Sie einen Ausdruck für $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ erhalten, d.h. drücken Sie die $\sigma_{ij}$'s mit Hilfe der $\omega_{ij}$'s und der Koeffizienten in $\Gamma$ aus i) aus.

iv) Nehmen Sie nun $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ an. Verbinden Sie diese Annahme mit Ihrem Ergebnis für $\sigma_{12}$ und $\sigma_{21}$, dass Sie in iii) erhalten haben und schreiben Sie $\gamma_{12}$ in Abhängigkeit der $\omega_{ij}$'s auf. Gibt Ihnen dieser Ausdruck die notwendigen Informationen, um Gleichung (9) exakt zu identifizieren? Interpretieren Sie kurz Ihr Ergebnis hinsichtlich der Möglichkeit, in der Kovarianzmatrix $\Sigma$ Restriktionen zu setzten.

d) Glauben Sie, dass unter Berücksichtigung Ihrer Ergebnisse in c) die Annahme

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Ihre Schlussfolgerungen über die Möglichkeit einer konsistenten Schätzung der strukturellen Parameter des Modells (5)-(7) ändert? Erklären Sie kurz Ihre Antwort.

**Aufgabe 5 (13 Punkte)**

a) Charakterisieren Sie qualitativ abhängige Variablen. Nennen Sie Beispiel für solche Variablen. Weshalb verlangen solche Variablen eine besondere Behandlung, wenn man Regressionsmodelle für diese Variablen aufstellen will?

b) Qualitativ abhängige Variablen können zum Beispiel mit Hilfe so genannter Probit und Logit Modelle modelliert werden. Worin besteht der Unterschied zwischen diesen Modellen?

c) Wie interpretieren Sie die geschätzten Koeffizienten eines Probit oder Logit Modells? Welcher andere Ausdruck wird verwendet, wenn die Veränderung in der Wahrscheinlichkeit des Eintritts eines Ereignis in Abhängigkeit einer Änderung einer unabhängigen Variable um eine Einheit von Interesse ist? Was müssen sie berücksichtigen, wenn Sie dieses Maß bzw. diesen Ausdruck verwenden?