Humboldt–Universität zu Berlin
Chair for Econometrics

Berlin, 09.04.2008

Klausur / Exam
Methoden der Ökonometrie / Econometric Methods

am / at 09.04.2008

Dauer/Examination Duration 150 Min.

Lesezeit/Reading Time 10 Min.

Nachname/Last Name: **Vorname/First Name:**

Immatrikulations–Nr/Enrolment No.:

Erlaubte Hilfsmittel: Formelsammlung (ausgeteilt), Taschenrechner (nicht programmierbar)
Allowed Resources: Formulary (provided), Pocket Calculator (nonintelligent)

Bitte bestätigen Sie durch Ihre Unterschrift, dass Ihnen bekannt ist, dass jeder Täuschungsversuch zum Abbruch der Arbeit mit der Bewertung ”ungenügend” (5.0) führt.
Please confirm by signing that you are aware that any attempt to deceive results in a grade ”failed” (5.0).

....
Unterschrift/Signature

(nur für die Prüfer/only for examiner)

Punkte/Points	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4	Gesamt/Total
mögliche / possible	33	31	30	26	120
erreichte / attained					

Note / Grade:

...
1. Prüfer/1st examiner

...
2. Prüfer/2nd examiner

Problem 1 (33 Points)

1. Consider the linear regression model:

$$y = X\beta + \varepsilon\ ,\quad \varepsilon \sim (0, \Psi)\ , \tag{1}$$

where Ψ is known and positive definite. The $(n \times k)$–regressor matrix X is deterministic.

   (a) **(4 Points)** Show that the estimators $\widehat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'y$ and $\widehat{\beta}_{GLS} = (X'\Psi^{-1}X)^{-1}X'\Psi^{-1}y$ are unbiased for β.

   (b) **(2 Points)** Show that the covariance matrix of $\widehat{\beta}_{OLS}$ is given by

$$\mathbb{V}[\widehat{\beta}_{OLS}] = (X'X)^{-1}X'\Psi X(X'X)^{-1}\ .$$

   (c) **(3 Points)** Show that the covariance matrix of $\widehat{\beta}_{GLS}$ is given by

$$\mathbb{V}[\widehat{\beta}_{GLS}] = (X'\Psi^{-1}X)^{-1}\ .$$

   (d) **(8 Points)** Using $A = (X'X)^{-1}X' - (X'\Psi^{-1}X)^{-1}X'\Psi^{-1}$ verify that the difference between both covariance matrices $\mathbb{V}[\widehat{\beta}_{OLS}] - \mathbb{V}[\widehat{\beta}_{GLS}]$ can be expressed as $A\Psi A'$ and show that $A\Psi A'$ is positive semidefinite.

   (e) **(2 Points)** How do you interpret the results in 1a) and 1d)?

2. Consider model (1) again. But assume now that $n = 100$ and $\Psi = \text{diag}(\sigma_1^2,\ \ldots,\ \sigma_{100}^2)$ with

$$\sigma_i^2 = \exp\left(\gamma_1 + \gamma_2 D_i\right)\ \text{ and }\ D_i = \begin{cases} 1 & \text{for } i = 1, \ldots, 30 \\ 0 & \text{for } i = 31, \ldots, 100\ . \end{cases}$$

   (a) **(2 Points)** Are the error terms homoskedastic and/or serially correlated?

   (b) **(2 Points)** Why is $\widehat{\beta}_{GLS}$ called weighted least squares estimator in this special case?

   (c) **(6 Points)** Consider the auxiliary regression

$$e_i^2 = \delta_1 + \delta_2 D_i + \xi_i\ , \tag{2}$$

   where e_i is the OLS residual from model (1). Let the following data be given:

$$\sum_{i=1}^{100}(e_i^2 - \overline{e^2})^2 = 100\ \text{ and }\ \sum_{i=1}^{100}\hat{\xi}_i^2 = 97\ ,$$

   where $\widehat{\xi}_i$ is the OLS residual from (2). Perform a Breusch–Pagan–Godfrey test of $H_0 : \delta_2 = 0$ against $H_1 : \delta_2 \neq 0$. Use a 5% significance level. 95% quantiles of the χ^2–distribution for selected degrees of freedom are given by:

degrees of freedom	1	2	3	98	99	100
95% quantile	3.84	5.99	7.81	122.11	123.23	124.34

   (d) **(2 Points)** How do you interpret your test decision? Based on your test decision, which estimator would you use?

3. **(2 Points)** What is wrong with the following text? Explain briefly.

   In model (1) $\widehat{\beta}_{GLS}$ is efficient because its covariance matrix is equal to the Cramér–Rao lower bound. In part 2 the Breusch–Godfrey LM test is an alternative test to the Breusch–Pagan–Godfrey test.

Problem 2 (31 Points)

1. Consider the linear regression model:

$$y = X\beta + \varepsilon\ , \quad \varepsilon \sim (0, \Psi) \ \text{ with } \Psi \text{ known and positive definite }, \tag{3}$$

where the $(n \times k)$–regressor matrix X is stochastic and independent of the $(n \times 1)$–vector ε. Moreover, assume that:

- $\frac{X'X}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \Omega_{XX}$ non–stochastic and positive definite,
- $\frac{X'\Psi X}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \Omega_{X\Psi X}$ non–stochastic and positive definite,
- $\frac{X'\Psi^{-1}X}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \Omega_{X\Psi^{-1}X}$ non–stochastic and positive definite,
- $\frac{X'\varepsilon}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$,
- $\frac{X'\Psi^{-1}\varepsilon}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$,
- $\frac{X'\varepsilon}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{D}} N(0, \Omega_{X'\Psi X})$,
- $\frac{X'\Psi^{-1}\varepsilon}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{D}} N(0, \Omega_{X'\Psi^{-1}X})$.

 (a) **(9 Points)** Show that the estimator $\widehat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'y$ for β is unbiased, consistent and asymptotically normally distributed.

 (b) **(5 Points)** Give the formal definitions for an unbiased, an asymptotically unbiased and a consistent estimator of β. What is the difference between an unbiased and an asymptotically unbiased estimator? Give one reason why an asymptotically unbiased estimator is not necessarily consistent.

 (c) **(3 Points)** Is the estimator $\widehat{\beta}_{GLS} = (X'\Psi^{-1}X)^{-1}X'\Psi^{-1}y$ for β unbiased and consistent? Give its asymptotic distribution.

2. Consider again the linear regression model in (3). Now suppose that you are analyzing time series data and that Ψ is unknown.

 (a) **(1 Point)** How can you estimate Ψ consistently if you know that Ψ is not diagonal ?

 (b) **(6 Points)** Describe briefly the stochastic properties (expectation, variance, consistency, asymptotic distribution) of $\widehat{\beta}_{FGLS} = (X'\widehat{\Psi}^{-1}X)^{-1}X'\widehat{\Psi}^{-1}y$ if $\widehat{\Psi}$ is a consistent estimator for Ψ. Is $\widehat{\beta}_{FGLS}$ BLUE resp. BUE?

 (c) **(2 Points)** How would you estimate β? Justify your estimator briefly.

 (d) **(3 Points)** Suppose you are interested in hypotheses tests about elements of β. Propose an asymptotic α–test for the (single) null hypothesis $H_0 : \beta_j = 0$ (with $0 \leq j \leq k$) when Ψ is not diagonal. Give a brief and informal description of the test statistic and of how to obtain critical values.

3. **(2 Points)** What is wrong with the following text? Explain briefly.

 The properties of consistency and asymptotic normality of $\widehat{\beta}_{OLS}$ in model (3) do not hold if the error terms are heteroskedastic but serially uncorrelated. Moreover, because $\widehat{\beta}_{GLS}$ is consistent it converges also in mean square to the parameter β.

<u>Problem 3</u> (30 Points)

1. Let y_i, $i = 1, \ldots, n$, be independent random variables that follow a normal distribution with $\mathbb{E}[y_i] = \mu$ and $\mathbb{V}[y_i] = \sigma^2$. The probability density function of y_i is given by

$$f(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{with } \sigma^2 = 16 \; . \tag{4}$$

   (a) **(4 Points)** Show that the log likelihood function is given by

$$\ln L(\mu|\sigma^2, y) = -\frac{n \ln 2\pi}{2} - \frac{n \ln \sigma^2}{2} - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(y_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) .$$

   (b) **(2 Points)** Derive the score function of the log likelihood function.

   (c) **(2 Points)** Derive the maximum likelihood estimator (MLE) of μ.

2. Consider model (4), but assume now that $\mathbb{E}[y_i] = \mu_i$ with

$$\mu_i = \gamma_1 + \gamma_2 D_i, \quad D_i = \begin{cases} 1 & \text{for } i = 1, \ldots, n_1 \\ 0 & \text{for } i = n_1 + 1, \ldots, n \; . \end{cases} \tag{5}$$

   (a) **(2 Points)** How do you interpret the assumption given in (5) with respect to the mean of y_i ? What does it mean if $\gamma_2 = 0$?

   (b) **(1 Point)** Give the log likelihood function under this assumption.

   (c) **(4 Points)** Maximizing the log likelihood yields the following estimators for $\gamma = (\gamma_1, \; \gamma_2)'$:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{1,ML} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i D_i}{n - n_1} \quad \text{and} \\ \hat{\gamma}_{2,ML} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i D_i}{n_1} - \hat{\gamma}_{1,ML} \; . \end{aligned}$$

   Suppose you observe a random sample of y_i, $i = 1, \ldots, 50$, for which the following data is given:

$$\sum_{i=1}^{50} y_i = 158, \quad \sum_{i=1}^{50} y_i^2 = 1070, \quad \sum_{i=1}^{50} y_i D_i = 100, \quad \sum_{i=1}^{50} D_i = \sum_{i=1}^{50} D_i^2 = 20.$$

   Compute $\hat{\gamma}_{ML}$.

3. **(12 Points)** Using the data given in part 2, perform an LR test for $H_0 : \; \gamma_2 = 0$ against $H_1 : \; \gamma_2 \neq 0$. The critical value is given by $\chi^2_{(1, \; 95\%)} = 3.84$.

4. **(3 Points)** What is wrong with the following text? Explain briefly.

   In the model of part 1, the MLE for μ is a biased estimator for the expectation of y_i. In the model of part 2, $\hat{\gamma}_{ML}$ is not efficient for γ if γ_2 is equal to zero. Moreover, the consistency of $\hat{\gamma}_{ML}$ is sufficient to conclude that $\hat{\gamma}_{ML}$ is asymptotically efficient.

Problem 4 (26 Points)

1. Consider the following linear regression model

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t}^* + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, T, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \text{ i.i.d.}, \tag{6}$$

where y_t denotes consumption expenditures in period t, x_{2t}^* denotes unobservable income in period t and $\beta = (\beta_1, \beta_2)'$ is a (2×1) parameter vector. x_{2t}^* and ε_t are independent. Assume that observable income x_{2t} can be expressed as unobservable income x_{2t}^* and a random component η_t:

$$x_{2t} = x_{2t}^* + \eta_t, \quad \eta_t \sim (0, \sigma_\eta^2) \text{ i.i.d.},$$

where x_{2t}^* and η_t are independent. In addition, η_t and ε_t are independent.

   (a) **(2 Points)** Rewrite the model in equation (6) to obtain

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + u_t. \tag{7}$$

   Give the representation of u_t in terms of β_2, η_t and ε_t.

   (b) **(5 Points)** Show that $\mathbb{E}[x_{2t}u_t] = -\beta_2\sigma_\eta^2 \neq 0$. How do you interpret this result ?

   (c) **(2 Points)** Let $X = (x_1, x_2)$ with x_1 denoting a $(T \times 1)$–vector of ones. Then, under the assumptions above, it can be shown that $\text{plim}\left(\frac{X'X}{T}\right) = \Omega_{XX}$ (positive definite) and $\text{plim}\left(\frac{X'u}{T}\right) = \Omega_{Xu} \neq 0$. What can you say about consistency of $\hat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'y$ in model (7) ?

2. Assume the following relationship between unobservable income, x_{2t}^*, and investment, w_{2t}:

$$x_{2t}^* = \gamma_1 + \gamma_2 w_{2t},$$

where $\gamma = (\gamma_1,\ \gamma_2)'$ is a parameter vector. Denoting $W = (w_1, w_2)$, with w_1 being a $(T \times 1)$–vector of ones, it can be shown that (i) $\text{plim}\left(\frac{W'W}{T}\right) = \Omega_{WW}$ (positive definite) and (ii) $\text{plim}\left(\frac{X'W}{T}\right) = \Omega_{XW}$ (nonsingular). Assume there exists a weak law of large numbers, such that (iii) $\text{plim}\left(\frac{W'u}{T}\right) = 0$ holds.

   (a) **(4 Points)** How do you interpret (ii) and (iii)?

   (b) **(10 Points)** To conduct simple IV estimation of model (6), take the following data as given:

$$\sum_{t=1}^{T} x_{2t} = 360, \quad \sum_{t=1}^{T} w_{2t} = 90, \quad \sum_{t=1}^{T} w_{2t}x_{2t} = 600, \quad \sum_{t=1}^{T} x_{t2}y_t = 660,$$
$$\sum_{t=1}^{T} y_t = 310, \quad \sum_{t=1}^{T} w_{2t}y_t = 525, \quad T = 50.$$

   Compute $\hat{\beta}_{IV}$. Interpret the estimated coefficients economically.

3. **(3 Points)** What is wrong with the following text? Explain briefly.

   The lower the correlation between the instruments and the regressors, the less efficient is the instrumental variable estimator (IVE). If the number of instruments is smaller than the number of regressors, the simple IVE cannot be used. However, generalized IV estimation is still possible. The generalized IVE is identical to the simple IVE if the number of observations is equal to the number of regressors.

Aufgabe 1 (33 Punkte)

1. Betrachten Sie folgendes lineares Regressionsmodell:

$$y = X\beta + \varepsilon\ , \quad \varepsilon \sim (0, \Psi)\ , \tag{8}$$

wobei Ψ bekannt und positiv definit ist. Die $(n \times k)$–Regressormatrix X ist deterministisch.

(a) **(4 Punkte)** Zeigen Sie, dass $\widehat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'y$ und $\widehat{\beta}_{GLS} = (X'\Psi^{-1}X)^{-1}X'\Psi^{-1}y$ unverzerrte Schätzer für β sind.

(b) **(2 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Kovarianzmatrix von $\widehat{\beta}_{OLS}$ gegeben ist durch

$$\mathbb{V}[\widehat{\beta}_{OLS}] = (X'X)^{-1}X'\Psi X(X'X)^{-1}\ .$$

(c) **(3 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Kovarianzmatrix von $\widehat{\beta}_{GLS}$ gegeben ist durch

$$\mathbb{V}[\widehat{\beta}_{GLS}] = (X'\Psi^{-1}X)^{-1}\ .$$

(d) **(8 Punkte)** Benutzen Sie $A = (X'X)^{-1}X' - (X'\Psi^{-1}X)^{-1}X'\Psi^{-1}$, um zu zeigen, dass die Differenz zwischen den beiden Kovarianzmatrizen $\mathbb{V}[\widehat{\beta}_{OLS}] - \mathbb{V}[\widehat{\beta}_{GLS}]$ als $A\Psi A'$ ausgedrückt werden kann. Zeigen Sie, dass $A\Psi A'$ positiv semidefinit ist.

(e) **(2 Punkte)** Wie interpretieren Sie Ihre Resultate in 1a) und 1d)?

2. Betrachten Sie erneut Modell (8). Nehmen Sie jetzt jedoch an, dass $n = 100$ und $\Psi = \text{diag}(\sigma_1^2,\ ...,\ \sigma_{100}^2)$ mit

$$\sigma_i^2 = \exp\left(\gamma_1 + \gamma_2 D_i\right) \ \text{ und } \ D_i = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 1, ..., 30 \\ 0 & \text{für } i = 31, ..., 100\ . \end{cases}$$

(a) **(2 Punkte)** Sind die Fehlerterme homoskedastisch und/oder seriell korreliert?

(b) **(2 Punkte)** Wieso kann man in diesem speziellen Fall $\widehat{\beta}_{GLS}$ als gewichteten Kleinste–Quadrate Schätzer bezeichnen?

(c) **(6 Punkte)** Betrachten Sie folgende Hilfsregression

$$e_i^2 = \delta_1 + \delta_2 D_i + \xi_i\ , \tag{9}$$

wobei e_i das OLS–Residuum aus Modell (8) bezeichnet. Gegeben sind weiterhin die folgenden Daten:

$$\sum_{i=1}^{100}(e_i^2 - \overline{e^2})^2 = 100 \ \text{ und } \ \sum_{i=1}^{100}\hat{\xi}_i^2 = 97\ ,$$

wobei $\widehat{\xi}_i$ das OLS–Residuum aus der Hilfsregression (9) ist. Führen Sie einen Breusch–Pagan–Godfrey Test für $H_0 : \delta_2 = 0$ gegen $H_1 : \delta_2 \neq 0$ durch. Benutzen Sie ein 5% Signifikanzlevel. Die 95% Quantile der χ^2–Verteilung sind für ausgewählte Freiheitsgrade tabelliert:

Freiheitsgrade	1	2	3	98	99	100
95% Quantile	3.84	5.99	7.81	122.11	123.23	124.34

(d) **(2 Punkte)** Wie interpretieren Sie Ihre Testentscheidung? Welchen Schätzer würden Sie aufgrund Ihrer Testentscheidung verwenden?

3. **(2 Punkte)** Was ist in dem folgenden Text falsch? Erklären Sie kurz.

Im Modell (8) ist $\widehat{\beta}_{GLS}$ effizient, weil seine Kovarianzmatrix gleich der Cramér–Rao Untergrenze ist. Im Aufgabenteil 2 ist der Breusch–Godfrey LM Test eine mögliche Alternative zum Breusch–Pagan–Godfrey Test.

Aufgabe 2 (31 Punkte)

1. Betrachten Sie folgendes lineares Regressionsmodell:

$$y = X\beta + \varepsilon \;, \;\; \varepsilon \sim (0, \Psi) \;, \tag{10}$$

wobei Ψ bekannt und positiv definit ist. X ist eine stochastische $(n \times k)$–Regressormatrix. X ist unabhängig vom $(n \times 1)$–Vektor ε. Ausserdem nehmen Sie an, dass:

- $\frac{X'X}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \Omega_{XX}$ nicht–stochastisch und positiv definit,
- $\frac{X'\Psi X}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \Omega_{X\Psi X}$ nicht–stochastisch und positiv definit,
- $\frac{X'\Psi^{-1}X}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \Omega_{X\Psi^{-1}X}$ nicht–stochastisch und positiv definit,
- $\frac{X'\varepsilon}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$,
- $\frac{X'\Psi^{-1}\varepsilon}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$,
- $\frac{X'\varepsilon}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{D}} N(0, \Omega_{X'\Psi X})$,
- $\frac{X'\Psi^{-1}\varepsilon}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{D}} N(0, \Omega_{X'\Psi^{-1}X})$.

(a) **(9 Punkte)** Zeigen Sie, dass $\widehat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'y$ ein unverzerrter, konsistenter und asymptotisch normalverteilter Schätzer für β ist.

(b) **(5 Punkte)** Geben Sie die formalen Definitionen für einen unverzerrten, asymptotisch unverzerrten und konsistenten Schätzer für β an. Was ist der Unterschied zwischen einem unverzerrten und einem asymptotisch unverzerrten Schätzer? Nennen Sie einen Grund, weshalb ein asymptotisch unverzerrter Schätzer nicht notwendigerweise konsistent ist.

(c) **(3 Punkte)** Ist der Schätzer $\widehat{\beta}_{GLS} = (X'\Psi^{-1}X)^{-1}X'\Psi^{-1}y$ unverzerrt und konsistent für β? Geben Sie seine asymptotische Verteilung an.

2. Betrachten Sie erneut das lineare Regressionsmodell in Gleichung (10). Nehmen Sie nun an, Sie analysieren Zeitreihendaten und Ψ sei unbekannt.

(a) **(1 Punkt)** Wie können Sie Ψ mit dem Wissen, dass Ψ nicht diagonal ist, konsistent schätzen?

(b) **(6 Punkte)** Beschreiben Sie kurz die stochastischen Eigenschaften (Erwartungswert, Varianz, Konsistenz, asymptotische Verteilung) von $\widehat{\beta}_{FGLS} = (X'\widehat{\Psi}^{-1}X)^{-1}X'\widehat{\Psi}^{-1}y$, wenn $\widehat{\Psi}$ ein konsistenter Schätzer für Ψ ist. Ist $\widehat{\beta}_{FGLS}$ BLUE bzw. BUE?

(c) **(2 Punkte)** Wie würden Sie β schätzen? Begründen Sie die Wahl Ihres Schätzers kurz.

(d) **(3 Punkte)** Nehmen Sie an, Sie wollen Hypothesentests für Komponenten von β durchführen. Schlagen Sie einen asymptotischen α–Test für die (einfache) Nullhypothese $H_0 : \beta_j = 0$ (mit $0 \leq j \leq k$) vor, wenn Ψ nicht diagonal ist. Beschreiben Sie kurz und nicht allzu formal die Teststatistik und wie Sie die kritischen Werte erhalten.

3. **(2 Punkte)** Was ist in dem folgenden Text falsch? Erklären Sie kurz.

Die Eigenschaften der Konsistenz und asymptotischen Normalverteilung von $\widehat{\beta}_{OLS}$ im Modell (10) liegen nicht vor, wenn die Fehlerterme heteroskedastisch aber nicht autokorreliert sind. Des weiteren konvergiert $\widehat{\beta}_{GLS}$ im quadratischen Mittel gegen den Parameter β, da der Schätzer konsistent ist.

Aufgabe 3 (30 Punkte)

1. Betrachten Sie die unabhängig normalverteilte Zufallsvariable y_i, $i = 1, \ldots, n$, mit $\mathbb{E}[y_i] = \mu$ und $\mathbb{V}[y_i] = \sigma^2$. Die Dichtefunktion von y_i lautet

$$f(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{mit } \sigma^2 = 16 \, . \tag{11}$$

   (a) **(4 Punkte)** Zeigen Sie, dass die logarithmierte Likelihood Funktion wie folgt gegeben ist

$$\ln L(\mu|\sigma^2, y) = -\frac{n \ln 2\pi}{2} - \frac{n \ln \sigma^2}{2} - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(y_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) .$$

   (b) **(2 Punkte)** Leiten Sie die Score Funktion der logarithmierten Likelihood Funktion her.

   (c) **(2 Punkte)** Leiten Sie den Maximum Likelihood (ML) Schätzer für μ her.

2. Benutzen Sie Modell (11). Nehmen Sie nun jedoch an, dass $\mathbb{E}[y_i] = \mu_i$, mit

$$\mu_i = \gamma_1 + \gamma_2 D_i, \quad D_i = \begin{cases} 1 & \text{for } i = 1, \ldots, n_1 \\ 0 & \text{for } i = n_1 + 1, \ldots, n \, . \end{cases} \tag{12}$$

   (a) **(2 Punkte)** Wie interpretieren Sie die Annahme in (12) bezüglich des Mittelwertes von y_i ? Was bedeutet $\gamma_2 = 0$?

   (b) **(1 Punkt)** Stellen Sie die logarithmierte Likelihood Funktion unter dieser Annahme auf.

   (c) **(4 Punkte)** Durch Maximierung der logarithmierten Likelihood Funktion erhalten Sie folgende Schätzer für $\gamma = (\gamma_1, \ \gamma_2)'$:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{1,ML} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i D_i}{n - n_1} \quad \text{und} \\ \hat{\gamma}_{2,ML} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i D_i}{n_1} - \hat{\gamma}_{1,ML} \, . \end{aligned}$$

   Für eine Zufallsstichprobe von y_i, $i = 1, \ldots, 50$, liegen die folgenden Daten vor:

$$\sum_{i=1}^{50} y_i = 158, \quad \sum_{i=1}^{50} y_i^2 = 1070, \quad \sum_{i=1}^{50} D_i y_i = 100, \quad \sum_{i=1}^{50} D_i = \sum_{i=1}^{50} D_i^2 = 20.$$

   Berechnen Sie $\hat{\gamma}_{ML}$.

3. **(12 Punkte)** Verwenden Sie die Daten aus Aufgabenteil 2 und führen Sie einen LR Test für $H_0 : \gamma_2 = 0$ gegen $H_1 : \ \gamma_2 \neq 0$ durch. Der kritische Wert ist $\chi^2_{(1,\ 95\%)} = 3.84$.

4. **(3 Punkte)** Was ist in dem folgenden Text falsch? Erläutern Sie kurz.

   Im Modell aus Teilaufgabe 1 ist der ML Schätzer für μ ein verzerrter Schätzer für den Erwartungswert von y_i. Im Modell aus Teilaufgabe 2 ist $\hat{\gamma}_{ML}$ kein effizienter Schätzer für γ, wenn γ_2 null ist. Des weiteren ist die Konsistenz von $\hat{\gamma}_{ML}$ hinreichend, um auf asymptotische Effizienz von $\hat{\gamma}_{ML}$ zu schließen.

Aufgabe 4 (26 Punkte)

1. Betrachten Sie folgendes lineares Regressionsmodell

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t}^* + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, T, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \text{ u.i.d.}, \tag{13}$$

wobei y_t die Konsumausgaben und x_{2t}^* das unbeobachtbare Einkommen zum Zeitpunkt t bezeichnet. $\beta = (\beta_1, \beta_2)'$ ist ein (2×1) Parametervektor. Des weiteren seien x_{2t}^* und ε_t unabhängig voneinander. Nehmen Sie an, dass das beobachtbare Einkommen x_{2t} mittels dem unbeobachtbaren Einkommen x_{2t}^* und einer Zufallsvariablen η_t wie folgt zusammen hängt:

$$x_{2t} = x_{2t}^* + \eta_t, \quad \eta_t \sim (0, \sigma_\eta^2) \text{ i.i.d. },$$

wobei x_{2t}^* und η_t unabhängig voneinander sind. η_t und ε_t sind ebenfalls unabhängig voneinander.

   (a) **(2 Punkte)** Formulieren Sie das Modell in Gleichung (13) um, so dass Sie

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + u_t \tag{14}$$

   erhalten. Stellen Sie u_t mittels β_2, η_t und ε_t dar.

   (b) **(5 Punkte)** Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[x_{2t}u_t] = -\beta_2\sigma_\eta^2 \neq 0$. Wie interpretieren Sie dieses Resultat?

   (c) **(2 Punkte)** Es sei $X = (x_1, x_2)$, wobei x_1 ein $(T \times 1)$–Einheitsvektor ist. Unter den obigen Annahmen kann somit gezeigt werden, dass $\text{plim}\left(\frac{X'X}{T}\right) = \Omega_{XX}$ (positiv definit) und $\text{plim}\left(\frac{X'u}{T}\right) = \Omega_{Xu} \neq 0$ gilt. Welche Aussage können Sie bezüglich der Konsistenz von $\hat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'y$ in Modell (14) treffen?

2. Nehmen Sie folgenden Zusammenhang zwischen dem unbeobachtbaren Einkommen, x_{2t}^*, und den Investitionen, w_{2t}, an:

$$x_{2t}^* = \gamma_1 + \gamma_2 w_{2t},$$

wobei $\gamma = (\gamma_1,\ \gamma_2)'$ ein Parametervektor ist. Es sei $W = (w_1, w_2)$, wobei w_1 einen $(T \times 1)$–Einheitsvektor bezeichnet. Es kann gezeigt werden, dass (i) $\text{plim}\left(\frac{W'W}{T}\right) = \Omega_{WW}$ (positiv definit) und (ii) $\text{plim}\left(\frac{X'W}{T}\right) = \Omega_{XW}$ (nicht singulär) gilt. Nehmen Sie an, dass ein schwaches Gesetz der Großen Zahlen existiert, so dass (iii) $\text{plim}\left(\frac{W'u}{T}\right) = 0$ gilt.

   (a) **(4 Punkte)** Wie interpretieren Sie (ii) und (iii)?

   (b) **(10 Punkte)** Um eine einfache Instrumentalvariablen Schätzung des Modells (6) durchzuführen, benutzen Sie folgende Daten:

$$\sum_{t=1}^{T} x_{2t} = 360, \quad \sum_{t=1}^{T} w_{2t} = 90, \quad \sum_{t=1}^{T} w_{2t}x_{2t} = 600, \quad \sum_{t=1}^{T} x_{t2}y_t = 660,$$
$$\sum_{t=1}^{T} y_t = 310, \quad \sum_{t=1}^{T} w_{2t}y_t = 525, \quad T = 50.$$

   Berechnen Sie $\hat{\beta}_{IV}$. Interpretieren Sie die geschätzten Koeffizienten ökonomisch.

3. **(3 Punkte)** Was ist in dem folgenden Text falsch? Erläutern Sie kurz.

Je niedriger die Korrelation zwischen den Instrumenten und den Regressoren, desto ineffizienter ist der Instrumentalvariablen Schätzer (IVS). Wenn die Anzahl der Instrumente kleiner ist als die Anzahl der Regressoren, dann kann der einfache IVS nicht verwendet werden. Dennoch ist eine generalisierte IV Schätzung möglich. Der generalisierte IVS ist identisch mit dem einfachen IVS, wenn die Anzahl der Beobachtungen gleich der Anzahl der Regressoren ist.