

Aufgabe 1 (25 Punkte)

Gegeben sei das lineare Regressionsmodell:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + e_t, \quad e_t \sim N(0, \sigma^2) \text{ i.i.d.}, \quad t = 1, \dots, 10, \quad (1)$$

wobei x_{t2} deterministisch ist. Ihnen sind die folgenden Daten bekannt:

$$\sum_{t=1}^{10} x_{t2} = 50, \quad \sum_{t=1}^{10} x_{t2}^2 = 310, \quad \sum_{t=1}^{10} x_{t2} y_t = 1172, \quad \sum_{t=1}^{10} y_t = 200, \quad \sum_{t=1}^{10} y_t^2 = 4558.$$

1. **(1 Punkt)** Die Variablen y_t und x_{t2} sind in dem Streudiagramm in Abbildung (1) dargestellt. Welches Vorzeichen erwarten Sie für β_1 und β_2 ?
2. **(7 Punkte)** Schätzen Sie den Parametervektor $\beta = (\beta_1, \beta_2)'$ aus Modell (1) mit der ML-Methode:
 - (a) Stellen Sie die Matrix $X'X$ und den Vektor $X'y$ auf, wobei X die $(T \times 2)$ -Regressormatrix im Modell (1) bezeichnet.
 - (b) Berechnen Sie $(X'X)^{-1}$ und schließlich den ML-Schätzer $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2)'$ für β aus Modell (1).
3. **(4 Punkte)** Berechnen und interpretieren Sie das Bestimmtheitsmaß R^2 .
4. **(2 Punkte)** Welche Optimalitätseigenschaften hat der ML-Schätzer unter den Annahmen des Modells (1)?
5. **(2 Punkte)** Erstellen Sie eine Prognose für die abhängige Variable (y_0) unter der Annahme, dass die unabhängige Variable ($x_{0,2}$) den Wert 5.5 annimmt.
6. **(5 Punkte)** Berechnen Sie für Ihre Prognose ein 95%-Prognoseintervall. Nehmen Sie an, dass $\sigma^2 = 7$ ist.
7. **(2 Punkte)** Inwiefern unterscheiden sich die Prognose und das 95% Prognoseintervall in ihrem Informationsgehalt? (kurze Antwort, keine Formeln)
8. **(2 Punkte)** Zeigen Sie, dass die von Ihnen in 5) benutzte Prognose erwartungstreu ist.

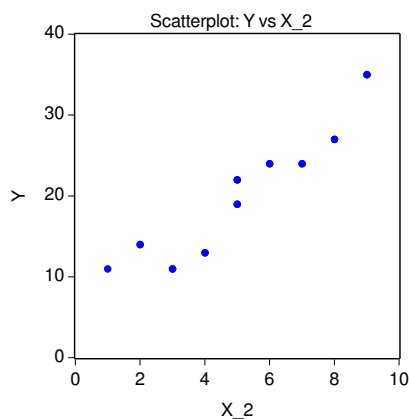


Abbildung 1: Streudiagramm der Variablen y_t und x_{t2} .

Aufgabe 2 (25 Punkte)

Ein US-Unternehmen in der Metallindustrie will eine Translog-Produktionsfunktion mit 25 Beobachtungen schätzen. Das Modell besteht aus folgenden Variablen:

LNy:	Logarithmierter Output,
C:	nimmt in allen Perioden den Wert 1 an,
LNL:	logarithmierter Arbeitseinsatz,
LNK:	logarithmiertes Kapital,
LNL2:	quadrierter logarithmierter Arbeitseinsatz,
LNK2:	quadriertes logarithmiertes Kapital,
LNLLNK:	LNL \times LNK.

In der Abbildung 2 sehen Sie die Ergebnisse aus Eviews.

1. **(2 Punkte)** Welche Variablen üben einen signifikanten Einfluss auf LNY aus ($\alpha = 0.10$)?
2. **(5 Punkte)** Testen Sie auf dem 5% Signifikanzniveau die Nullhypothese, dass $H_0 : \beta_{LNL} + \beta_{LNK} = 1$ ist.
3. **(3 Punkte)** Erstellen Sie ein 95% Konfidenzintervall für β_{LNK} .
4. **(5 Punkte)** Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \beta_{LNL} \leq 1$ und nehmen Sie dabei an, dass $\sigma^2 = 0.04$ beträgt ($\alpha = 0.05$). Auf welchem Signifikanzniveau würden Sie gerade noch die Nullhypothese annehmen?
5. **(6 Punkte)** Überprüfen Sie auf einem 5% Signifikanzniveau die Nullhypothese, dass LNL2, LNK2 und LNLLNK gemeinsam keinen signifikanten Einfluss haben. Verwenden Sie dazu die Information, dass

$$[R(X'X)^{-1}R']^{-1} = \begin{bmatrix} 1.176 & 2.105 & 3.002 \\ 2.105 & 5.720 & 6.580 \\ 3.002 & 6.580 & 8.563 \end{bmatrix}$$

gilt. Wie würden Sie das Ergebnis ökonomisch interpretieren?

6. **(3 Punkte)** Welche Annahmen müssen Sie über die Fehlerterme treffen, so dass die von Ihnen durchgeführten Tests gültig sind?
7. **(1 Punkt)** Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

Der Fehler 1. Art beim Hypothesentest ist die Ablehnung der Nullhypothese, obwohl die Alternativhypothese wahr ist.

Dependent Variable: LNY
Method: Least Squares
Date: 07/06/06 Time: 13:10
Sample: 1 25
Included observations: 25

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.007410	2.957677	0.340609	0.7371
LNL	3.503118	1.517274	2.308823	0.0324
LNK	-1.848961	0.942903	-1.960924	0.0647
LNL2	-0.717325	0.662615	-1.082568	0.2925
LNK2	0.205185	0.286695	0.715692	0.4829
LNLLNK	0.144424	0.421460	0.342674	0.7356
R-squared	0.963250	Mean dependent var	7.465031	
Adjusted R-squared	0.953579	S.D. dependent var	0.771289	
S.E. of regression	0.166179	Akaike info criterion	-0.545943	
Sum squared resid	0.524692	Schwarz criterion	-0.253413	
Log likelihood	12.82428	F-statistic	99.60098	
Durbin-Watson stat	1.893954	Prob(F-statistic)	0.000000	

Geschätzte Kovarianzmatrix des Koeffizientenschätzers $[\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}]$

	C	LNL	LNK	LNL2	LNK2	LNLLNK
C	8.747855	-2.661773	-0.172901	-0.118647	-0.297793	0.420462
LNL	-2.661773	2.302122	-1.095606	-0.553569	0.068425	0.113426
LNK	-0.172901	-1.095606	0.889066	0.444706	0.016235	-0.185628
LNL2	-0.118647	-0.553569	0.444706	0.439058	0.133501	-0.256490
LNK2	-0.297793	0.068425	0.016235	0.133501	0.082194	-0.109958
LNLLNK	0.420462	0.113426	-0.185628	-0.256490	-0.109958	0.177629

Abbildung 2: EVIEWS-Ergebnisse zur Aufgabe 2

Aufgabe 3 (25 Punkte)

1. Gegeben sei das folgende lineare Regressionsmodell:

$$y_t = \beta_1 + x_{t2}\beta_2 + e_t, \quad e_t = \rho e_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma^2) i.i.d., \quad |\rho| < 1 \quad (2)$$
$$\sum_{t=2}^{30} (\hat{e}_t - \hat{e}_{t-1})^2 = 75.71, \quad \sum_{t=2}^{30} \hat{e}_{t-1}^2 = 27.74, \quad \hat{e}_1^2 = 0.2, \quad \hat{e}_{30}^2 = 0.1,$$

wobei x_{t2} deterministisch ist.

- (a) **(3 Punkte)** Unter welcher Bedingung ist der KQ-Schätzer für $\beta = (\beta_1, \beta_2)'$ in Modell (2) effizient? Begründen Sie kurz.
- (b) **(4 Punkte)** Prüfen Sie mit einem geeigneten Test die Nullhypothese, dass keine negative Autokorrelation vorliegt ($\alpha = 5\%$).
- (c) **(4 Punkte)** Schätzen Sie ρ und beschreiben Sie kurz, wie Sie diesen Schätzer verwenden könnten, um eine FGLS-Schätzung für β in Modell (2) durchzuführen.

2. Betrachten Sie nun das folgende lineare Regressionsmodell:

$$y_t = \beta_1 + x_{t2}\beta_2 + e_t, \quad e_t = 0.5\sqrt{x_{t2}}u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma^2) i.i.d., \quad (3)$$

wobei x_{t2} positiv und deterministisch ist.

- (a) **(4 Punkte)** Geben Sie den Erwartungswert und die Kovarianzmatrix des Fehlervektors e an. Schreiben Sie die Kovarianzmatrix in der Form $\sigma^2\Psi$. Wie ist e verteilt?
 - (b) **(4 Punkte)** Welchen Schätzer schlagen Sie für $\beta = (\beta_1, \beta_2)'$ in Modell (3) vor und welche statistischen Eigenschaften hat dieser?
 - (c) **(2 Punkte)** Geben Sie eine Matrix P an, für die $P\Psi P' = I$ gilt.
3. Die Abbildungen (3) und (4) enthalten die Ergebnisse der Schätzung einer Einkommensfunktion amerikanischer Beschäftigter aus dem Jahre 1985 (MANAG - Manager Dummy, PROF - Professor Dummy, EX - Berufserfahrung, EXSQ - quadrierte Berufserfahrung). Vor der Schätzung wurden die Beobachtungen in Beschäftigte spanischer Abstammung (Gruppe I) und Beschäftigte nicht-spanischer Abstammung (Gruppe II) aufgeteilt.
- (a) **(2 Punkte)** Überprüfen Sie auf dem 5% Signifikanzniveau die Annahme, dass die Varianz der Störterme für die Beobachtungen 1-45 signifikant größer als die Varianz für die restliche Stichprobe (46-90) ist.
 - (b) **(2 Punkte)** Welches Verfahren schlagen Sie für die Schätzung der Regressionskoeffizienten anhand ihres Testergebnisses vor? Welches Verfahren hätten Sie bei gegenteiliger Testentscheidung vorgeschlagen?

Dependent Variable: LNWAGE

Method: Least Squares

Date: 07/25/06 Time: 11:42

Sample: 1 45

Included observations: 45

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MANAG	0.445019	0.197771	2.250167	0.0300
PROF	0.534519	0.195279	2.737211	0.0092
EX	0.038559	0.020095	1.918897	0.0622
EXSQ	-0.000816	0.000489	-1.670363	0.1027
C	1.881434	0.172086	10.93313	0.0000
R-squared	0.279813	Mean dependent var		2.335964
Adjusted R-squared	0.207794	S.D. dependent var		0.519241
S.E. of regression	0.462156	Akaike info criterion		1.398609
Sum squared resid	8.543513	Schwarz criterion		1.599349
Log likelihood	-26.46870	F-statistic		3.885277
Durbin-Watson stat	1.460968	Prob(F-statistic)		0.009294

Abbildung 3: Aufgabe 3, Schätzung für Gruppe I

Dependent Variable: LNWAGE

Method: Least Squares

Date: 07/25/06 Time: 11:44

Sample: 46 90

Included observations: 45

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MANAG	0.411203	0.275805	1.490919	0.1438
PROF	0.307531	0.167041	1.841057	0.0730
EX	0.060182	0.015143	3.974312	0.0003
EXSQ	-0.001153	0.000315	-3.654545	0.0007
C	1.366515	0.142210	9.609124	0.0000
R-squared	0.373269	Mean dependent var		1.929522
Adjusted R-squared	0.310596	S.D. dependent var		0.445389
S.E. of regression	0.369808	Akaike info criterion		0.952772
Sum squared resid	5.470312	Schwarz criterion		1.153513
Log likelihood	-16.43738	F-statistic		5.955802
Durbin-Watson stat	1.853810	Prob(F-statistic)		0.000740

Abbildung 4: Aufgabe 3, Schätzung für Gruppe II