

# 1. Klausur

Lehrstuhl für Ökonometrie  
1999

Name: .....  
Matr.Nr.: .....

## Klausur "Einführung in die Ökonometrie"

### Aufgabe 1 (25 Punkte)

Der Sparkassenverband beauftragt Sie, anhand von Quartalsdaten für 1989 : 3.Quartal bis 1999 : 2. Quartal folgende Kreditnachfragefunktion für den privaten Sektor zu schätzen.

$$y_t = x_{t1}\beta_1 + x_{t2}\beta_2 + e_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

mit:

- $y_t$  Kreditaufnahme(kurzfristige Kredite) der privaten Haushalte in Periode t (in Mrd. DM),
- $x_{t1}$  nimmt für alle Beobachtungen den Wert 1 an,
- $x_{t2}$  durchschnittlicher nominaler Kreditzins für kurzfristige Kredite in Periode t (in %).

Folgende Werte liegen vor:

$$\sum_{t=1}^{40} x_{t2} = 250, \quad \sum_{t=1}^{40} x_{t2}^2 = 1600, \quad \sum_{t=1}^{40} y_t = 200, \quad \sum_{t=1}^{40} x_{t2}y_t = 1227.5, \quad \sum_{t=1}^{40} y_t^2 = 1015.78,$$

1. Schätzen Sie die Koeffizienten  $\beta_1$  und  $\beta_2$  mit der Methode der kleinsten Quadrate (OLS). Interpretieren Sie Ihre Schätzung für  $\beta_2$ .
2. Schätzen Sie die Varianz des Störterms  $e_t$ .
3. Berechnen und Interpretieren Sie das Bestimmtheitsmaß.
4. Für das Regressionsmodell:

$$y = X\beta + e, \quad e \sim (0, \sigma^2 I),$$

sei  $b^* = (X'AX)^{-1}X'Ay$  ein möglicher Schätzer für  $\beta$ . Nehmen Sie an, dass A eine positiv definite Matrix mit festen Werten ist.

- (a) Begründen Sie, warum  $b^*$  ein linearer Schätzer ist.
- (b) Zeigen Sie, dass  $b^*$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $\beta$  ist.
- (c) Wählen Sie die Matrix  $A$  so, dass  $b^*$  BLUE (best linear unbiased estimator) ist.

**Aufgabe 2** (25 Punkte)

Die Marktforschungsabteilung eines Waschmittel-Herstellers stellt für den Absatz des Unternehmens unter der Annahme  $e_t \sim N(0, \sigma^2)$  und  $E[e_t e_s] = 0, t \neq s$ , das lineare Regressionsmodell

$$y_t = x_{t1}\beta_1 + x_{t2}\beta_2 + x_{t3}\beta_3 + e_t, \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

auf mit

- $y_t$  Absatz des Waschmittels in Mill. DM (logarithmiert),
- $x_{t1}$  Konstante mit Wert 1,
- $x_{t2}$  Preis des Waschmittels pro Packung in DM (logarithmiert),
- $x_{t3}$  Ausgaben für verkäufsfördernde Maßnahmen (Probenverteilung, Direkt-Mailing) in Mill. DM (logarithmiert).

Folgende Zwischenergebnisse sind anhand von Monatsdaten der letzten zwei Jahre erhoben worden.

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.006 & -0.01 & 0.001 \\ -0.01 & 0.004 & -0.005 \\ 0.001 & -0.005 & 0.008 \end{pmatrix}, \quad X'y = \begin{pmatrix} 91 \\ 82 \\ 79 \end{pmatrix}, \quad y'y = 10, \quad \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} -0.19 \\ -0.98 \\ 0.31 \end{pmatrix}$$

1. Das Unternehmen erwägt die Umstellung seiner Marketing-Strategie. Prüfen Sie, ob verkaufsfördernde Maßnahmen einen Einfluss auf den Absatz haben ( $\hat{\sigma}^2 = 3.96, \alpha = 0.05$ ). Geben Sie aufgrund Ihres Ergebnisses der Geschäftsleitung eine Empfehlung hinsichtlich der Marketing-Strategie des Unternehmens.
2. Testen Sie die zusammengesetzte Hypothese  $\beta_2 = -1$  und  $\beta_3 = 0$  auf einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.05$ . Wieso unterscheiden sich die Testergebnisse aus 1 und 2 in Bezug auf  $\beta_3$ . Begründen Sie kurz Ihre Vermutung.
3. Stellen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für  $\beta_2$  unter der Annahme auf, dass  $\sigma^2 = 4.0$  bekannt ist. Wie würde sich das Konfidenzintervall verändern, wenn
  - (a) die Fehlervarianz nicht bekannt wäre?
  - (b) das Konfidenzniveau  $1 - \alpha$  größer gewählt würde?

Begründen Sie kurz Ihre Auffassung.

### Aufgabe 3 (25 Punkte)

Ein bekannter Getränkehersteller ist an der Wirkung von Wetteränderungen auf den Absatz von ORANGE HEAVY interessiert. Es liegen Monatsdaten für die durchschnittliche Monatstemperatur  $x_{t2}$  (in Celsius) und den Absatz  $y_t$  (in 1000 Stück) für ein Jahr von Oktober bis September vor. Die Preise haben sich in diesem Zeitraum nicht verändert. Die Regressionsgleichung lautet

$$y_t = x_{t1}\beta_1 + x_{t2}\beta_2 + e_t$$

wobei  $x_{t1}$  die Konstante eins bezeichnet und  $E[e_t e_s] = 0, t \neq s$  mit  $s, t = 1, 2, \dots, T$ .

1. Die Geschäftsführung hat eine einfache OLS-Schätzung durchgeführt und möchte wissen, ob die Fehlervarianz im Winterhalbjahr (Oktober bis März) geringer ist als im Sommerhalbjahr. Führen Sie einen geeigneten Test zu einem Signifikanzniveau von 5% durch. Dazu seien Ihnen folgende Informationen gegeben:

$$\hat{e}'_S \hat{e}_S = 24.82, \quad \hat{e}'_W \hat{e}_W = 3.32$$

wobei  $\hat{e}_W(\hat{e}_S)$  den Vektor der geschätzten Fehlervarianz für das Winter- (Sommer-) halbjahr bezeichnet.

Können Sie ohne Kenntnis des exakten kritischen Wertes aus Ihrem Ergebnis auch eine Aussage für ein Signifikanzniveau von 1% ableiten. Begründen Sie kurz Ihre Auffassung.

2. Sie erhalten nun die Information, dass die Fehlervarianz im Sommer  $\sigma_s^2$  gleich 6 ist. Leiten Sie die Transformationsmatrix aus der Fehlerkovarianzmatrix ab, mit deren Hilfe die Regressormatrix  $X$  und der Vektor der abhängigen Variablen  $y$  derart umgeformt werden können, dass eine OLS-Schätzung auf Basis der umgeformten Variablen BLUE ist.

Führen Sie nun die Schätzung für  $\beta$  durch. Dabei seien Ihnen folgende Matrizen gegeben:

$$X'_W X_W = \begin{pmatrix} 6 & 32 \\ 32 & 280 \end{pmatrix}, \quad X'_S X_S = \begin{pmatrix} 6 & 114 \\ 114 & 2250 \end{pmatrix},$$

$$X'_W y_W = \begin{pmatrix} 186 \\ 1212 \end{pmatrix}, \quad X'_S y_S = \begin{pmatrix} 354 \\ 6876 \end{pmatrix},$$

mit

$$X = \begin{pmatrix} X_W \\ X_S \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_W \\ y_S \end{pmatrix}.$$

Wie hoch ist die Varianz der Parameterschätzungen?

3. Nehmen Sie nun an, dass Ihnen die Fehlervarianzen nicht gegeben seien. Beschreiben Sie für diesen Fall, wie Sie dann den Parametervektor  $\beta$  schätzen können. Berechnen Sie nichts!

#### Aufgabe 4 (25 Punkte)

In der ökonomischen Abteilung eines führenden Herstellers von Solarenergiezellen wird seit langem vermutet, dass der Absatz dieser Energiezellen linear von Preisen für erneuerbare Brennstoffe abhängt. Zur Überprüfung Ihrer Vermutung erstellen die Mitarbeiter der Abteilung das folgende auf Jahresdaten basierende Modell:

$$y_t = x_{t1}\beta_1 + x_{t2}\beta_2 + e_t, \quad t = 80, \dots, 99$$

Dabei nimmt  $x_{t1}$  in jeder Periode den Wert 1 an.  $y_t$  bezeichnet einen Absatzindex, in den die einzelnen Produkte des Unternehmens gewichtet eingehen. Analog ist  $x_{t2}$  ein Energiepreisindex. Für die verwendeten Indizes gilt:  $y_{80} = x_{80,2} = 1$ . Die Schätzung des Modells liefert die folgenden Zwischenergebnisse:

$$\sum_{t=81}^{99} \hat{e}_t \hat{e}_{t-1} = 1.25, \quad \sum_{t=81}^{99} \hat{e}_{t-1} = 2.50, \quad \hat{e}_{99} = 0.4, \quad \hat{e}_{80} = 0.2.$$

1. Erläutern Sie formal und kurz, warum die Durbin-Watson Statistik  $d$  im Fall unkorrelierter Störterme  $e_t$  in großen Stichproben  $d \approx 2$  gilt.
2. Testen Sie die Annahme der Autokorrelationsfreiheit für das obige Modell. Gehen Sie im folgenden davon aus, dass Sie die Annahme unkorrelierter Störterme verworfen haben.
3. Schätzen Sie anhand der obigen Zwischenergebnisse den Autokorrelationskoeffizienten  $\rho$  für das Modell

$$e_t = \rho e_{t-1} + u_{t1} \quad u_t \sim (0, \sigma^2), \quad E[u_t u_s] = 0, \quad \text{für } t \neq s$$

4. Welche Annahmen müssen Sie treffen, damit Sie die Parameter im obigen Modell mit einem linearen Schätzer effizient schätzen können?
5. Die Schätzung des zu dem obigen Modell gehörenden verallgemeinerten linearen Regressionsmodells ergibt:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1.20 \\ 0.80 \end{pmatrix}$$

- (a) In der ökonomischen Abteilung rechnet man für das Jahr 2000 mit konstanten Energiepreisen, d.h.  $x_{00,2} = x_{99,2} = 2.25$ . Prognostizieren Sie unter dieser Annahme den zu erwartenden Absatz an Solarenergiezellen für das Jahr 2000.
- (b) Ist die von Ihnen ermittelte Prognose effizient? Begründen Sie kurz Ihre Auffassung. Worin unterscheidet sich die Prognose im verallgemeinerten Modell ( $\Psi \neq I$ ) von der Prognose unter der Annahme ( $\Psi = I$ ).